Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 11

Platzaufgaben

Platzaufgabe 31 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = x\ .$$

Wir schreiben

$$f_N(x) \ := \ \sum_{k=1}^{N} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\ .$$

Wir schreiben ferner

$$f_\infty(x) \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\ .$$

(a) Überprüfen Sie: Es ist $\operatorname{Fourier}_f(x) = f_\infty(x)$.

(b) Geben Sie das Fourier-Polynom $f_N(x)$ an für $N \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle f_2 | f_2 \rangle$ unter Verwendung von 7.2.4.
Bestimmen Sie $\|f_2\|$.

Platzaufgabe 32 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = x\ .$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Bestätigen Sie durch Vergleich mit Platzaufgabe 31, dass die Koeffizienten c_k von $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\operatorname{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2} \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Platzaufgabe 33
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische gerade Funktion, für welche $f(x) = 1 - x$ ist für $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ für $-3 \leqslant x \leqslant 3$.
Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$ unter Verwendung von 7.7.1.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 11

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 24.01.24 / Do 25.01.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 23.01.24 im Ilias.

Hausaufgabe 31 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{x^2}{\pi} - |x|.$$

Die Fourier-Reihe von f sei bereits bekannt:

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \ = \ -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{k^2} \cos(kx) \ .$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$ für die Ableitung f'.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(0)$ durch Einsetzen von $x = 0$ in $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(0)$ unter Verwendung von $\lim\limits_{x \to 0-0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x)$.
Vergleichen Sie die Resultate.

(c) Sei $f'_N(x)$ das N-te Fourier-Polynom von $f'(x)$ für $N \geqslant 1$.
Bestimmen Sie $\|f' - f'_1\|^2$ und $\|f' - f'_2\|^2$.

Hausaufgabe 32

(a) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Platzaufgabe 30, um $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ zu berechnen.

(b) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 28, um $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$ zu berechnen.

Hausaufgabe 33 Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} + 1 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ \frac{2x}{\pi} - 1 & \text{für } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\mathrm{Fourier}^{\mathbb{C}}_g(x)$.

(b) Bestätigen Sie durch Vergleich mit Hausaufgabe 31, dass $g(x) = f'(x)$ ist an allen Stellen, an denen f differenzierbar ist. Bestätigen Sie ferner, dass die Koeffizienten c_k von $\mathrm{Fourier}^{\mathbb{C}}_g(x)$ mit den dortigen Koeffizienten a_k, b_k von $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geqslant 1.$$