Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 13

Platzaufgaben

Platzaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; 4u_{xx}\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 2 \quad \text{für } x \in (0,1)\;,$$

sowie $u(0,0)=0$ und $u(1,0)=0$.
Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der betrachteten Wärmeleitungsgleichung unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

Verwenden Sie hierzu das Ergebnis von Platzaufgabe 34 oder von 8.2.8.

Platzaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; \frac{1}{5}u_{xx}\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 2\sin(5x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\;.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{5}u_{xx}$.

(c) Bestimmen Sie den maximalen Wert von $u(x,1)$ für $x \in [0,\pi]$.

Platzaufgabe 39 Wir betrachten die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$.

(a) Geben Sie eine Lösung $u(x,t)$ an, welche $u(x,0) = \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $u(0,t) = -\sin(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Verwenden Sie hierzu 8.3.2.

(b) Überprüfen Sie die in (a) gefundene Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Blatt 13

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 07.02.24 / Do 08.02.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 06.02.24 im Ilias.

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; 4u_{xx} + \sin(\tfrac{\pi}{3}x)\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 3 - x \quad \text{für } x \in (0,3)\ ,$$

sowie $u(0,0) = 0$ und $u(3,0) = 0$. Das Ergebnis von Hausaufgabe 34 kann verwendet werden.

(a) Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der zugehörigen homogenen Wärmeleitungsgleichung $u_t \;=\; 4u_{xx}$ unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

(b) Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der betrachteten inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $u_t \;=\; 4u_{xx} + \sin(\tfrac{\pi}{3}x)$ unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

Hausaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; \tfrac{1}{2}u_{xx}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; -\sin(x) + \sin(5x) + \frac{1}{4}\sin(7x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \tfrac{1}{2}u_{xx}$.

(c) Die Funktion $u(\tfrac{\pi}{6},t)$ besitzt ein globales Minimum auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Bestimmen Sie die Stelle $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, bei der $u(\tfrac{\pi}{6},t)$ dieses Minimum annimmt.

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 1 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; \sin(x) + \tfrac{x}{\pi} \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\ .$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Geben Sie eine Lösung $\tilde{u}(x,t)$ für das Problem aus (a) an.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ des Ausgangsproblems unter Verwendung von (b).