Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 15

Hausaufgaben

Keine Abgabe.

Hausaufgabe 43 Wir betrachten die komplex differenzierbare Funktion

$$f \;:\; \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;:\; z \mapsto f(z) \;=\; \sin(z)\;.$$

(a) Bestimmen Sie $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))$, wobei $x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

Überprüfen Sie: Es sind u und v harmonische Funktionen.

(b) Überprüfen Sie: Es erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

(c) Wir betrachten das Vektorfeld $F(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ auf $\mathbb{R}^2$.

Überprüfen Sie: Es ist F quell- und wirbelfrei.

Hausaufgabe 44

(a) Sei $n \geqslant 0$. Sei $f_n(z) = z^n$, definiert auf $\mathbb{C}$.

Sei $u_n(x,y) = \mathrm{Re}(f_n(x+\mathrm{i}y))$, wobei $x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

Man bestimme $u_n(x,0)$.

(b) Man finde eine harmonische Funktion $u(x,y)$ mit $u(x,0) = x^3 - 2x^2 + x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Man bestimme $u(0,y)$.

(c) Man bestimme eine zu $u(x,y)$ harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$.

Man bestimme $v(x,0)$ und $v(0,y)$.

(d) Bestimmen Sie eine harmonische Funktion $w(x,y)$ mit $w(x,0) = x^3 - 2x^2 + x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $w(0,y) = y^3 + 2y^2 - y$ für $y \in \mathbb{R}$.

Verifizieren Sie durch direkte Rechnung: Es erfüllt w die Bedingung $\Delta w = 0$ auf $\mathbb{R}^2$.