Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Platzaufgabe 6

(a) Man parametrisiere den Doppelkegel $D = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \}$ mittels einer geeigneten Parametrisierung Φ.

(b) Bestimmen Sie dafür die Größen E, F und G.

(c) Wählen Sie ein Rechteck J im Definitionsbereich der Parametrisierung aus (a). Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\Phi(J)$.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 18.12.23 in den Gruppenübungen oder bis Mo 18.12.23, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ für $t \neq 0$.

(c) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$ für $t \neq 0$.

Hausaufgabe 6 Wir betrachten die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \;\mapsto\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{t}{\varphi} \mapsto \Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(t)\cos(\varphi) \\ \cosh(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix} \;.$$

Diese beschreibt die Rotationsfläche, bei welcher der Graph $x_1 = \cosh(x_3)$ aus der x_1-x_3-Ebene um die x_3-Achse rotiert.

(a) Bestimmen Sie E, F und G.

(b) Sei $c(\varphi) = \binom{1}{\varphi}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$. Sei $C := \Phi \circ c$.
Verwenden Sie (a), um die Länge des Halbkreises $C([0, \pi])$ zu bestimmen.

(c) Sei $J = [0, 1] \times [0, \pi]$. Verwenden Sie (a), um die Fläche von $\Phi(J)$ zu bestimmen.