

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 4

Platzaufgaben

Platzaufgabe 7 Wir parametrisieren die x_1 - x_2 -Ebene mittels

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u+v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- (a) Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
Sei $d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
Skizzieren Sie die von C und von D parametrisierten Kurven.
- (b) Bestimmen Sie $t_1 \in \mathbb{R}$ und $t_2 \in \mathbb{R}$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.
- (c) Berechnen Sie unter Verwendung von $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.
Bestimmen Sie hieraus diesen Winkel. Vergleichen Sie mit der Skizze.

Platzaufgabe 8

- (a) Man parametrisiere die x_1 - x_2 -Ebene auf einfachst mögliche Weise.
- (b) Man bestimme E , F und G .
- (c) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ_{jk}^i für $i, j, k \in \{1, 2\}$ mittels E , F und G .
- (d) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 4

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 08.01.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 08.01.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 7 Wir betrachten wieder den Doppelkegel $D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \right\}$ aus Platzaufgabe 6, parametrisiert durch

$$\Phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(z, \varphi) = \begin{pmatrix} z \cos(\varphi) \\ z \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} .$$

- (a) Sei $c(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
 Sei $d(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
 Bestimmen Sie $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung von $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.

Hausaufgabe 8

- (a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}$, wobei $u, v \in \mathbb{R}$.

Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.

Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert? Ist S rotationssymmetrisch bezüglich der x_3 -Achse?

- (b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ .
- (c) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ_{jk}^i für $i, j, k \in \{1, 2\}$ mittels E, F und G .
- (d) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.