Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 13 Sei $\Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$ für $s \in [0, 2\pi]$.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man bestimme $\kappa \cdot \cos(\nu)$. Man bestimme ν.

Man vergleiche mit dem Wert von ν aus einer direkten geometrischen Überlegung.

Platzaufgabe 14

Sei $R > 0$. Sei, wie in Platzaufgabe 12,

$$\Phi \;:\; [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\mapsto\; \Phi(\varphi, z) \;=\; \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \;.$$

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ -R\cos(t) \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

An der Stelle $t_0 = \pi$ bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

Mittels einer geometrischen Überlegung bestimme man ν.

Hieraus berechne man κ.

(c) Man vergleiche mit der Formel für die Krümmung an den Scheitelpunkten einer Ellipse aus dem Beispiel aus §1.4.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 29.01.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 29.01.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 13

Wie in Hausaufgabe 7 (bis auf Reihenfolge der Parameter) betrachten wir die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; [0,2\pi] \times \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\mapsto\; \Phi(\varphi, z) \;=\; \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} .$$

des Doppelkegels D.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$.

(b) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

An der Stelle $t_0 = \pi$ bestimme man $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

Man bestimme hieraus ν. Man vergleiche mit dem Wert von ν aus einer direkten geometrischen Überlegung.

(c) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

An der Stelle $t_0 = \pi$ bestimme man $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

Hausaufgabe 14 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man bestimme $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

(c) Wir betrachten die Stelle $t_0 = 0$.

Man bestimme κ durch direkte Verwendung von $C(t) = \Phi(c(t))$. Man bestimme ν näherungsweise zeichnerisch. Man vergleiche den so erhaltenen Wert für $\kappa \cdot \cos(\nu)$ mit dem in (b) erhaltenen Wert.