

## Differentialgeometrie für Geodäten

**Blatt 7**

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 13** Sei  $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$  für  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Sei  $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  für  $s \in [0, 2\pi]$ .

(a) Man bestimme  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ .

(b) Man bestimme  $\kappa \cdot \cos(\nu)$ . Man bestimme  $\nu$ .

Man vergleiche mit dem Wert von  $\nu$  aus einer direkten geometrischen Überlegung.

**Platzaufgabe 14**

Sei  $R > 0$ . Sei, wie in Platzaufgabe 12,

$$\Phi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ .

(b) Sei  $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ -R \cos(t) \end{pmatrix}$  für  $t \in [0, 2\pi]$ .

An der Stelle  $t_0 = \pi$  bestimme man  $\Phi(c(t))$  und  $\kappa \cdot \cos(\nu)$ .

Mittels einer geometrischen Überlegung bestimme man  $\nu$ .

Hieraus berechne man  $\kappa$ .

(d) Man vergleiche mit der Formel für die Krümmung an den Scheitelpunkten einer Ellipse aus dem Beispiel aus §1.4.

## Differentialgeometrie für Geodäten

**Blatt 7**

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 29.01.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 29.01.24, 12:30 im Ilias.

**Hausaufgabe 13**

Wie in Hausaufgabe 7 (bis auf Reihenfolge der Parameter) betrachten wir die Parametrisierung

$$\Phi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} z \cos(\varphi) \\ z \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} .$$

des Doppelkegels  $D$ .

(a) Man bestimme  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$  und  $K_{\text{Gauß}}$ .

(b) Sei  $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$  für  $t \in [0, 2\pi]$ .

An der Stelle  $t_0 = \pi$  bestimme man  $\kappa \cdot \cos(\nu)$ .

Man bestimme hieraus  $\nu$ . Man vergleiche mit dem Wert von  $\nu$  aus einer direkten geometrischen Überlegung.

(c) Sei  $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  für  $t \in [0, 2\pi]$ .

An der Stelle  $t_0 = \pi$  bestimme man  $\kappa \cdot \cos(\nu)$ .

**Hausaufgabe 14** Wir betrachten wieder die Parametrisierung  $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}$  der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche  $S$ , wobei  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Sei  $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Man bestimme  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ .

(b) Man bestimme  $\kappa \cdot \cos(\nu)$ .

(c) Wir betrachten die Stelle  $t_0 = 0$ .

Man bestimme  $\kappa$  durch direkte Verwendung von  $C(t) = \Phi(c(t))$ . Man bestimme  $\nu$  näherungsweise zeichnerisch. Man vergleiche den so erhaltenen Wert für  $\kappa \cdot \cos(\nu)$  mit dem in (b) erhaltenen Wert.