Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 17

Man bestätige mittels Theorema egregium:
Die Gaußsche Krümmung der x_1-x_2-Ebene ist überall gleich 0.

Platzaufgabe 18

Man verwende Gauß-Bonnet, Version 1, um herzuleiten:
Die Winkelsumme in einem Dreieck in der Ebene beträgt $\pi = 180°$.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 9

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 12.02.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 17

Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$, ein Ellipsoid; vgl. Beispiel in §3.2.

(a) Nebenrechnung: Man bestimme die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{t}{\sqrt{4-3t^2}}$.

(b) Man bestätige Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

(c) Man bestätige das Theorema egregium im vorliegenden Fall.

Hausaufgabe 18

Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel S von Radius 1.

Wir betrachten das Viereck

$$J \ := \ \{ \ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \ \mid \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \vartheta \in [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}] \} \ \subseteq \ U \ = \ [0, 2\pi] \times [0, \pi] \ .$$

Dann ist $\Phi(J)$ ein krummliniges Viereck auf der Kugel S.

(a) Man skizziere $\Phi(J)$ auf S.

(b) Man bestätige Gauß-Bonnet, Version 1, im vorliegenden Fall.