Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Vortragsübung am Mi 22.11.23, Fr 24.11.23

Aufgabe 4 Gegeben ist das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 z \\ -x^2 yz \\ z \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$V = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2 \}.$$

(a) Skizzieren Sie V.

(b) Sei S die geschlossene Fläche, die V umrandet. Zerlegen Sie S in drei geeignete Teilstücke und berechnen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, S)$.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_V \operatorname{div}(g)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

als Gebietsintegral.

(d) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Gauß.

Aufgabe 5

Sei $J := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(r, \varphi) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ \cos(r) \end{smallmatrix}\right)$.

Sei $S := \Phi(J)$.

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{smallmatrix} -x_2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie S.

(b) Bestimmen Sie $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{dO}$ als Flächenintegral.

(c) Bestimmen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(d) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Stokes.