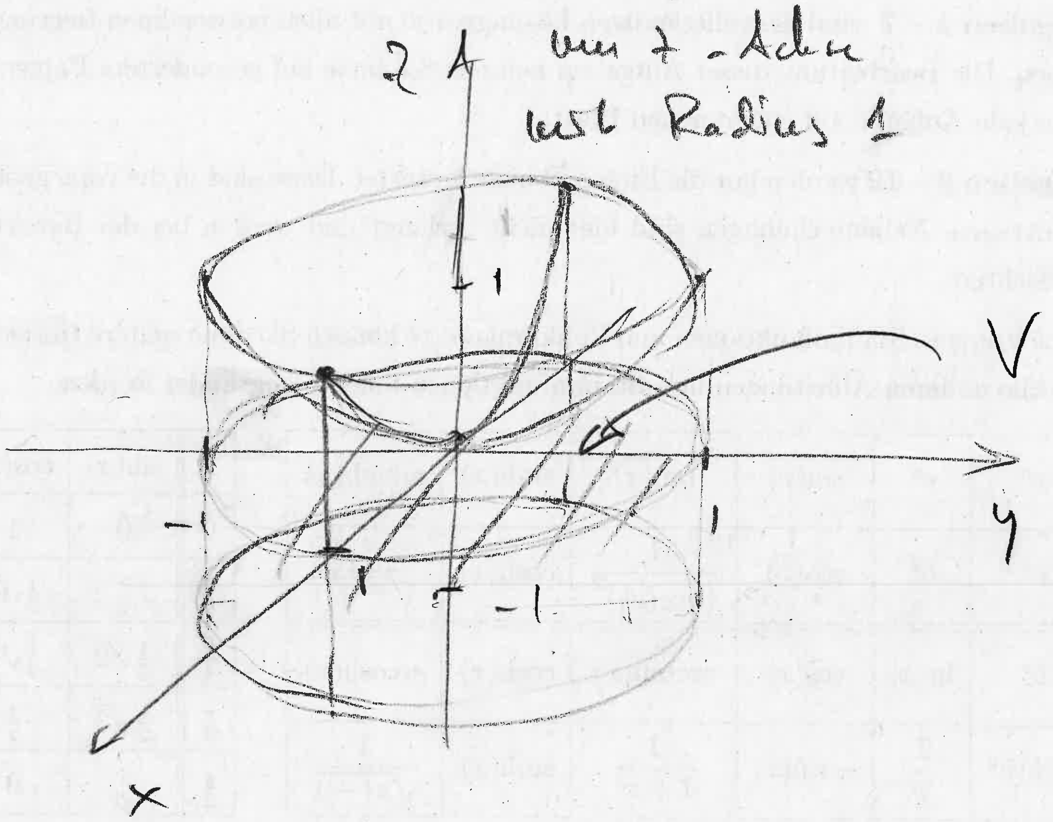
## Aufgabe 4

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{\text{im Zylinder}}, \; \underbrace{-1}_{\text{„Boden"}} \le z \le \underbrace{x^2+y^2}_{\text{„gekrümmter Deckel"}} \right\}$

im Zylinder um $z$-Achse mit Radius 1




(b) Ausfluss:

Unterer Deckel:

$$\Phi_1(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Standard-Polarkoord.}$$

$r \in [0, 1]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

Anteil an $A(g, S_t)$: Oberfläche von $V$

$$A_1 = \iint_J g(\phi_1(r,\varphi)) \cdot \left(\phi_{1,r}(r,\varphi) \times \phi_{1,\varphi}(r,\varphi)\right) dr\, d\varphi$$

Wobei: $J = [0,1] \times [0, 2\pi]$ Parameterbereich

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x y^2 z \\ -x^2 y z \\ z \end{pmatrix}$$

Dann:
$$g(\phi_1(r,\varphi)) = g(r \underbrace{c_\varphi}_{\cos(\varphi)}, r \underbrace{s_\varphi}_{\sin(\varphi)}, -1) = \begin{pmatrix} r c_\varphi r^2 s_\varphi^2 (-1) \\ -r^2 c_\varphi^2 r s_\varphi (-1) \\ (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r^3 c_\varphi s_\varphi^2 \\ r^3 c_\varphi^2 s_\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{1,r} = \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} -r s_\varphi \\ r c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{1,r} \times \phi_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r c_\varphi^2 - (-r s_\varphi^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad r > 0$$

Problem: $\Phi_{,r} \times \Phi_{,\varphi}$ zeigt in Körper hinein, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ nach oben zeigt

Vertauschen $r, \varphi$!

$$\Phi_{,\varphi} \times \Phi_{,r} = -\Phi_{,r} \times \Phi_{,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

Vektor steht senkrecht zur unteren Deckelfläche und zeigt nach außen.

$$\Rightarrow A_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \begin{pmatrix} -r^3 c_\varphi s_\varphi^2 \\ r^3 c_\varphi^2 s_\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1}_{=\frac{1}{2}} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Oberer Deckel:

$$\Phi_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$x = r c_\varphi$$
$$y = r s_\varphi$$
$$\Rightarrow z = x^2+y^2 = r^2 c_\varphi^2 + r^2 s_\varphi^2 = r^2$$

$$g(\Phi_2(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} r c_\varphi \, r^2 s_\varphi^2 \, r^2 \\ -r^2 c_\varphi^2 \, r s_\varphi \, r^2 \\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^5 c_\varphi s_\varphi^2 \\ -r^5 c_\varphi^2 s_\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{2,r} = \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \\ 2r \end{pmatrix} \qquad \Phi_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} -r s_\varphi \\ r c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{2,r} \times \Phi_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} -2r^2 c_\varphi \\ -2r^2 s_\varphi \\ r c_\varphi^2 - (-r s_\varphi^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 c_\varphi \\ -2r^2 s_\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

zeigt nach oben, da $r > 0$ $\rightarrow$ paßt

Anteil am Ausfluss

$$A_2 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \begin{pmatrix} r^5 c_\varphi s_\varphi^2 \\ -r^5 c_\varphi^2 s_\varphi \\ r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2 c_\varphi \\ -2r^2 s_\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cancel{-2r^7 c_\varphi^2 s_\varphi^2 + 2r^7 c_\varphi^2 s_\varphi^2} + r^3 \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^1}_{=\frac{1}{4}} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Mantelfläche:

$$\Phi_3(z,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos(\varphi) \\ 1 \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $z \in [-1,+1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$g(\Phi_3(z,\varphi)) = \begin{pmatrix} c_\varphi s_\varphi^2 z \\ -c_\varphi^2 s_\varphi z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{3,z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{3,\varphi} = \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{3,z} \times \Phi_{3,\varphi} = \begin{pmatrix} -c_\varphi \\ -s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschung um ihn nach außen zeigen zu lassen

$$\Phi_{3,\varphi} \times \Phi_{3,z} = \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anteil am Ausfluß:

$$A_3 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=-1}^{z=+1} \begin{pmatrix} c_\varphi s_\varphi^2 z \\ -c_\varphi^2 s_\varphi z \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \underbrace{z s_\varphi^2 c_\varphi^2 - z c_\varphi^2 s_\varphi^2 + 0}_{0} \, dz\, d\varphi$$

$$= 0$$

$$A(g, S) = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi + 0 = \frac{3\pi}{2}$$

(c)

$$g = \begin{pmatrix} x y^2 z \\ -x^2 y z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial}{\partial x}(x y^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 y z) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = y^2 z - x^2 z + 1$$

Integral über V mittels Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,c_\varphi \\ r\,s_\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}(g) = y^2 z - x^2 z + 1$$

$$= r^2 s_\varphi^2 z - r^2 c_\varphi^2 z + 1$$

$$\iiint_V \operatorname{div}(g)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=-1}^{r^2} \left( r^2 s_\varphi^2 z - r^2 c_\varphi^2 z + 1 \right) \cdot r \; dz\, dr\, d\varphi$$

$\left| \det(\text{Jacobi}) \right|$ für Zylinderkoord.

$$= \ldots$$

---

NR $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi + \varphi)$

$$\overset{\text{TH 1}}{=} \cos(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\sin(\varphi)$$

$$= c_\varphi^2 - s_\varphi^2$$

$$\Rightarrow s_\varphi^2 - c_\varphi^2 = -c_{2\varphi}$$

---

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^{r^2} -r^3 c_{2\varphi} z + r \; dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ -r^3 s_{\varphi} \frac{z^2}{2} + rz \right]_{z=-1}^{z=r^2} dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( -r^3 s_{2\varphi} \left( \frac{r^4}{2} - \frac{1}{2} \right) + r\left(r^2 - (-1)\right) \right) dr\, d\varphi$$

Grenzen tauschen

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( -r^3 s_{2\varphi} \left( \frac{r^4}{2} - \frac{1}{2} \right) + r^3 + r \right) d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1 \Big[ \underbrace{-r^3 \frac{s_{2\varphi}}{2} \left( \frac{r^4}{2} - \frac{1}{2} \right)}_{=0} + (r^3 + r)\varphi \Big]_0^{2\pi} dr$$

$\varphi = 0 \quad r = 0$

$$= \int_0^1 2\pi \left( r^3 + r \right) dr$$

$$= \left[ 2\pi \left( \frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \right]_0^1$$

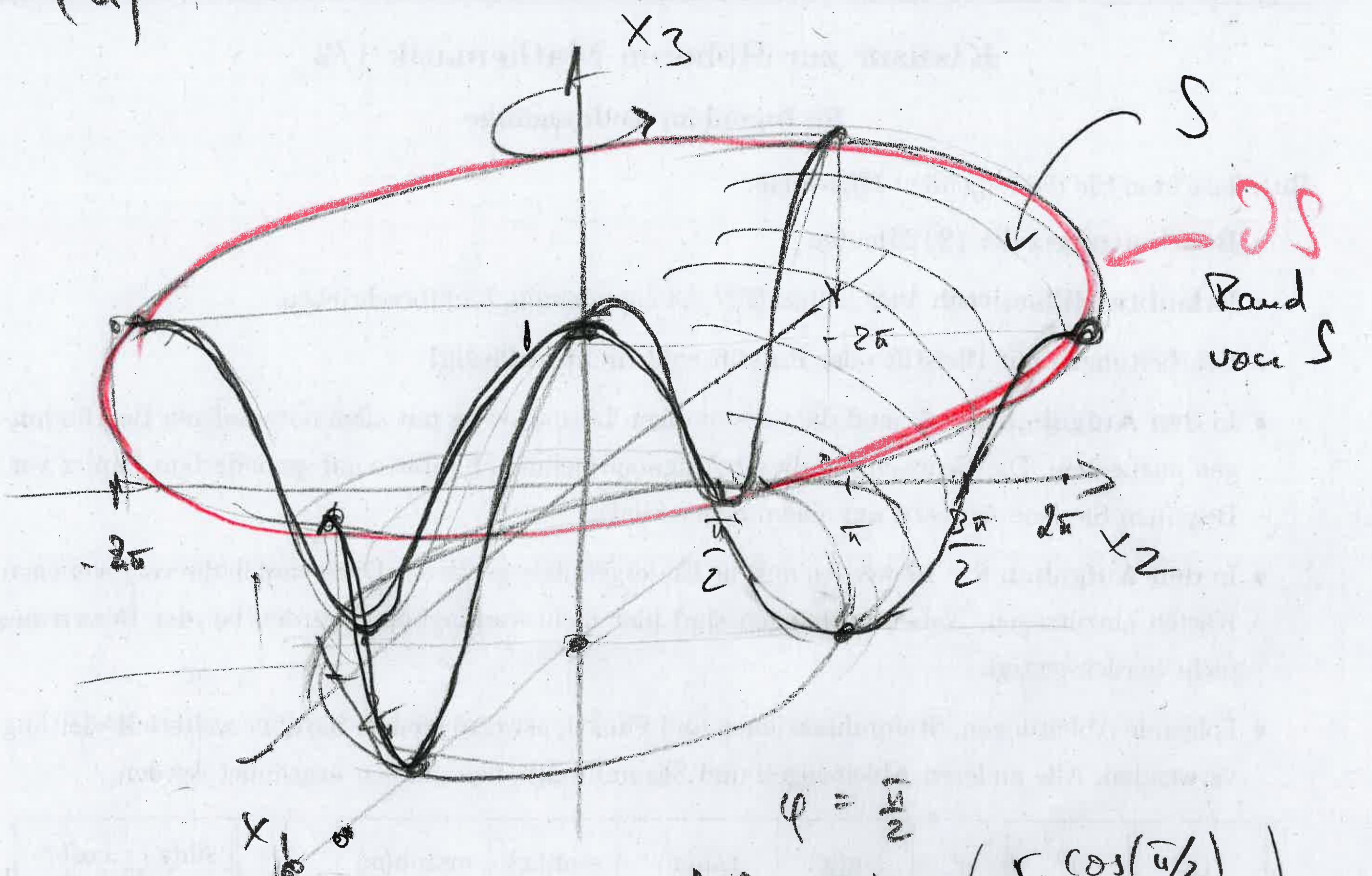
$$= 2\pi \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

(d) Wir haben

$$A(g, S) \overset{(b)}{=} \frac{3}{2}\pi \overset{(c)}{=} \iiint_V \operatorname{div}(g)\, dx\, dy\, dz$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.

(a)




$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} r\cos(\pi/2) \\ r\sin(\pi/2) \\ \cos(r) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ \cos(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ \cos(r) \end{pmatrix}$$

$\cos(r)$ unabh. von $\varphi$

$\Rightarrow \Phi(\Omega) = S$ ist rotations-symm. bzgl. $x_3$-Achse

(b) $$\iint_S \operatorname{rot}(g) \cdot \underline{\underline{n}}\, d\mathcal{O} = ?$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} g = \nabla \times g = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_r = \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \\ -s_r \end{pmatrix}, \quad \phi_\varphi = \begin{pmatrix} -r s_\varphi \\ r c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_r \times \phi_\varphi = \begin{pmatrix} r s_r c_\varphi \\ r s_r s_\varphi \\ r c_\varphi^2 - (-r s_\varphi^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r s_r c_\varphi \\ r s_r s_\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

$r > 0 \Rightarrow$ zeigt nach oben

$$J: r \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot}(g) \cdot n\, d\mathcal{O}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{2\pi} \operatorname{rot}(g)(\phi(r,\varphi)) \cdot (\phi_r(r,\varphi) \times \phi_\varphi(r,\varphi))\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \, \partial_r \, c_\varphi \\ r \, \partial_r \, s_\varphi \\ r \end{pmatrix} dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2\pi} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=2\pi} d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{4\pi^2}{2} \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{4\pi^2}{2}$$

$$= \underline{\underline{4\pi^3}}$$

(c) $\oint_{\partial S} g(x) \cdot dx$

Für $\partial S$ : $c(t) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(t) \\ 2\pi \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

Das paßt zur Rechten-Hand-Regel $\uparrow \underline{\Phi}_r \times \underline{\Phi}_\varphi$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} g(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^{2\pi} g(C(t)) \cdot C'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} g(2\pi\cos(t), 2\pi\sin(t), 1) \cdot \begin{pmatrix} -2\pi\sin(t) \\ 2\pi\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\pi\sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\pi\sin(t) \\ 2\pi\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\pi^2 \sin(t)^2\, dt$$

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 1 - 2\sin(t)^2$$
$$\Rightarrow \sin(t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\pi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt$$

$$= \left[ 4\pi^2 \left(\frac{1}{2}t - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(2t)}_{\text{gibt } 0}\right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2}(2\pi - 0) = 4\pi^3$$

(d) $$\iint_S \operatorname{rot}(g) \cdot n\, d\sigma \overset{(b)}{=} 4\pi^3 \overset{(c)}{=} \int_{\partial S} g(x) \cdot dx$$

Dies bestätigt den Satz von Stokes im vorliegenden Fall.