VÜ 3

A6

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x^2} e^{-x}, \quad x > 0$$

(a) homogene DGL: $y'' + 2y' + y = 0$

char. Polynom: $x^2 + 2x^2 + 1 \cdot x^0 = x^2 + 2x + 1$
$$= (x+1)^2$$

Nullstellen: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$

Fundamentalsystem: $f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-x}$

Probe: $f_1'(x) = -e^{-x}$, $f_1''(x) = e^{-x}$

In DGL einsetzen:
$$e^{-x} + 2(-e^{-x}) + e^{-x} = 0$$

weitere Fkt. im Fundamentalsystem: $f_2(x) = x \cdot e^{\lambda_2 x} = x e^{-x}$

Probe: $f_2'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x}$
$$f_2''(x) = -(1-x)e^{-x} + (-e^{-x})$$
$$= (x-2)e^{-x}$$

In DGL einsetzen:
$$(x-2)e^{-x} + 2 \cdot (1-x)e^{-x} + xe^{-x} = (x-2+2-2x+x)e^{-x}$$
$$= 0e^{-x} = 0$$

Gesamtes Fundamentalsystem: $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$= c_1 e^{-x} + c_2 \cdot xe^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-x} \quad , \quad x > 0$$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = c_1(x)\, f_1(x) + c_2(x)\, f_2(x)$

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{e^{-x} \cdot (1-x)e^{-x} - (-e^{-x}) \cdot x e^{-x}} \cdot \begin{pmatrix} (1-x)e^{-x} & -x e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{(1-x)e^{-2x} + x e^{-2x}} \begin{pmatrix} (1-x)e^{-x} & -x e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{e^{-2x}}}_{e^{2x}} \begin{pmatrix} (1-x)e^{-x} & -x e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)e^{x} & -x e^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)e^{x} & -x e^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x e^{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-x} \\ e^{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$c_1(x) = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln(|x|) + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

Wähle $c_1 = c_2 = 0$

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot f_1(x) + c_2(x) \cdot f_2(x) = -\ln(x)\, e^{-x} - \frac{1}{\cancel{x}} \cdot (\cancel{x} \cdot e^{-x})$$

$$y_p(x) = -\ln(x)e^{-x} - e^{-x}$$

$$y_p'(x) = -\frac{1}{x}e^{-x} + \ln(x)e^{-x} + e^{-x}$$

$$y_p''(x) = \dots$$

In DGL einsetzen und sehen ob $y_p'' + 2y_p' + y_p = \frac{1}{x^2}e^{-x}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

$$= -\ln(x)e^{-x} - e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

AWP: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

$$y(1) = -\ln(1)\, e^{-1} - e^{-1} + c_1 e^{-1} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{-1}$$

$$= (-1 + c_1 + c_2)e^{-1} \stackrel{!}{=} 1$$

$$y'(x) = -\frac{1}{x}e^{-x} + \ln(x)e^{-x} + e^{-x} + (-c_1)e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 xe^{-x}$$

$$= \left(-\frac{1}{x} + \ln(x) + 1 - c_1 + c_2 - c_2 x\right)e^{-x}$$

$$y'(1) = (-1 + 0 + 1 - c_1 + c_2 - c_2 \cdot 1)e^{-1} = -c_1 e^{-1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0$$

In erste Gleichung $c_1 = 0$ einsetzen:

$$(-1 + 0 + c_2)e^{-1} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 e^{-1} - e^{-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 e^{-1} = 1 + e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 = (1 + e^{-1}) \cdot e^{1} = e + 1$$

Lösung des AWP:

$$y(x) = -\ln(x)e^{-x} - e^{-x} + (e+1) \cdot xe^{-x}$$

VÜ 3

A7

$$y''' - 2y'' + 5y' = 3x$$

(a) Homogene DGL: $y''' - 2y'' + 5y' = 0$

char. Polynom: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

NS bestimmen:

$$p(x) = \underbrace{x}_{\Rightarrow \lambda_1 = 0}(x^2 - 2x + 5)$$

$$\Rightarrow f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{0x} = 1$$

$$\lambda_{2,3} = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

komplexes Fundamentalsystem: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^{(1+2i)x}$, $f_3(x) = e^{(1-2i)x}$

reelles Fundamentalsystem: $\tilde{f}_2(x) = e^{1 \cdot x} \cdot \cos(2x)$

$\tilde{f}_3(x) = e^x \cdot \sin(2x)$

$f_1(x) = 1$

Allg. homogene Lsg.:

$$y_h(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot \tilde{f}_2(x) + c_3 \cdot \tilde{f}_3(x) \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$= c_1 + c_2 e^x \cos(2x) + c_3 e^x \sin(2x)$$

Inhomogenität: $3x = 3x \cdot e^{0x}$

Ansatz der rechten Seite:

$$y_p(x) = \underbrace{x}_{\text{weil } \lambda_1 = 0 \text{ NS ist}} \cdot \underbrace{(ax + b)}_{\text{weil r.S.} = 3x} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Ansatz: $y_p(x) = ax^2 + bx \qquad a, b \in \mathbb{R}$

inhomogene DGL: $y''' - 2y'' + 5y' = 3x$

$y_p'(x) = 2ax + b \;, \quad y_p''(x) = 2a \;, \quad y_p'''(x) = 0$

$0 - 2 \cdot (2a) + 5 \cdot (2ax + b) \overset{!}{=} 3x$

$\Leftrightarrow \quad -4a + 10ax + 5b \overset{!}{=} 3x$

$\Leftrightarrow \quad 10a \cdot x + (5b - 4a) \overset{!}{=} 3x + 0$

$\begin{cases} 10a = 3 \\ 5b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = \frac{3}{10} \\ 5b - 4 \cdot \frac{3}{10} = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = \frac{3}{10} \\ 5b = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{10} \;, \quad b = \frac{6}{25}$

Also: $y_p(x) = \frac{3}{10} x^2 + \frac{6}{25} x$

Aufgabe 8 VÜ Blatt 3

$$y' - x e^{x+y} = 0$$

$$y' = \underbrace{xe^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)}$$

Also: Separierbare DGL

1. Konstante Lösungen:

$g(y) \stackrel{!}{=} 0$

Da ~~e^y~~ $g(y) = e^y$ nie null wird gibt es keine konstanten Lösungen.

2. Integrationsmethode:

$$\underbrace{\int \frac{1}{e^y} dy}_{= -e^{-y}} = \underbrace{\int x e^x dx}_{\stackrel{P.I.}{=} (x-1)e^x + c} \quad , c \in \mathbb{R}$$

TNR:

$$\int u' \cdot v \, dx = [u \cdot v] - \int u \cdot v' dx$$

$u' = e^x \quad v = x$

$$\int x e^x dx = [xe^x] - \int e^x dx = [xe^x - e^x] = (x-1)e^x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -(x-1)e^x - c$$

$$-y = \ln(-(x-1)e^x - c)$$

$$y = -\ln(-(x-1)e^x - c) = \ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^x - c}\right)$$

$y(0) = 0$: $\ln\left(\frac{1}{1-c}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow c = 0$

Lösung: $y(x) = \ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^x}\right)$

Probe: $y(0) = \ln\left(\frac{1}{e^0}\right) = 0$ ✓

$$y'(x) = -\frac{1}{-(x-1)e^x} \cdot \left[(-(x-1))e^x + (-1)e^x\right] = -1 + \left(-\frac{1}{x-1}\right)$$

In DGL einsetzen:

$$-1-\frac{1}{x-1}+x\cdot e^{x}\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{-(x-1)e^x}\right)} = -1-\frac{1}{x-1}-x\cdot e^{x}\cdot\frac{1}{-(x-1)e^x}$$

$$= -\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}+x\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-1}=0 \quad ✓$$

Zusatz falls noch Zeit dafür:

Betrachte A7 mit rechter Seite cos(x) statt 3x:

$$y'''-2y''+5y'=\cos(x)$$

Ansatz: $y_p = c e^{ix}$, $c\in\mathbb{C}$ und DGL $y'''-2y''+5y'=e^{ix}$

$$y_p' = cie^{ix}$$
$$y_p'' = -ce^{ix}$$
$$y_p''' = -cie^{ix}$$

Einsetzen gibt

$$-cie^{ix}+2ce^{ix}+5cie^{ix} \overset{!}{=} e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow (-ci+2c+5ci)e^{ix} \overset{!}{=} e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow (2c+4ci)e^{ix} \overset{!}{=} (1+0i)e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2c+4ci=0i} \quad 2c+4ci=1$$

$$\Leftrightarrow c(2+4i)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2+4i} \Rightarrow f_p=\frac{1}{2+4i}\cdot e^{ix}$$

Jetzt noch den Realteil von f_p bestimmen, weil $Re(e^{ix})=\cos(x)$

$$c=\frac{1}{2+4i}=\frac{2-4i}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{2-4i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i$$

$$f_p=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i\right)\cdot e^{ix}=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i\right)\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)$$

$$=\frac{1}{10}\cos(x)-\frac{1}{5}i\cos(x)+\frac{1}{10}i\sin(x)+\frac{1}{5}\sin(x)$$

$$y_p = Re(f_p)=\frac{1}{10}\cos(x)+\frac{1}{5}\sin(x)$$

Probe: $y_p' = -\frac{1}{10}\sin(x)+\frac{1}{5}\cos(x)$; $y_p'' = -\frac{1}{10}\cos(x)-\frac{1}{5}\sin(x)$, $y_p'''=\frac{1}{10}\sin(x)-\frac{1}{5}\cos(x)$

$$y_p'''-2y_p''+5y_p' = \underbrace{\left(\frac{1}{10}+2\frac{1}{5}-\frac{5}{10}\right)}_{=0}\sin(x)+\underbrace{\left(-\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{10}+1\right)}_{=1}\cos(x) \quad ✓$$