Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **11.04.2024** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) := \binom{x_1}{x_1^2+x_2^2}$.

(a) Skizzieren Sie den Bereich J und die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in drei geeigenete Teilkurven K_1, K_2 und K_3 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

(c) Bestimmen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(e) Vergleichen Sie die Resultate aus (c) und aus (d) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Aufgabe 2 (3+1+1 = 5 Punkte)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$xy'' - y' - (x+1)y \;=\; 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und $h(x) = \mathrm{e}^{x}(2x-1)$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Bestimmen Sie für g, h die Wronskimatrix $\mathrm{W}(1)$.
Überprüfen Sie: g, h ist ein Fundamentalsystem der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

Aufgabe 3 (2+4 = 6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x < \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi < x < 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Bitte wenden →

Aufgabe 4 (2+1+2+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \;.$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Es sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie die Wronskimatrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ zum Fundamentalsystem aus (a).
Berechnen Sie $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (2+2+1 = 5 Punkte)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} \;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 3\sin(x) + \sin(3x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi] \;.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$.

(c) Die Funktion $u(\frac{\pi}{2},t)$ besitzt ein globales Maximum auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Bestimmen Sie die Stelle $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, bei der $u(\frac{\pi}{2},t)$ dieses Maximum annimmt.

Name, Vorname: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \dfrac{x^2+3}{y}$, $y(0) = -1$:

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei $F(s) = \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+10}$.

Geben Sie die Funktion $f(t)$ an, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ hat:

$f(t) =$

Bestimmen Sie: $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-t} * f(t)) =$

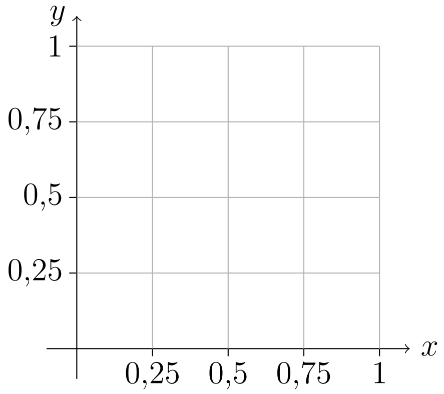
Aufgabe 8 (2 Punkte)

Wir betrachten die Kurve $K = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \}$.

Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.

Skizzieren Sie K. Berechnen Sie das Volumen V von R.

Skizze von K:



$V =$