Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **11.04.2024** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \ \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) := \binom{x_1}{x_1^2+x_2^2}$.

(a) Skizzieren Sie den Bereich J und die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in drei geeigenete Teilkurven K_1, K_2 und K_3 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

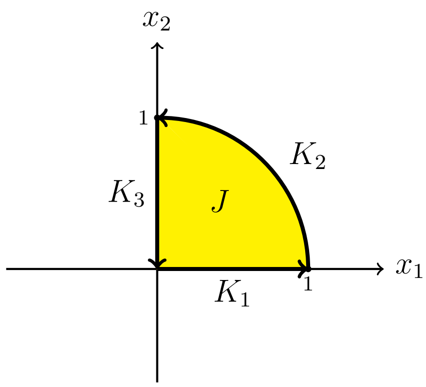
(c) Bestimmen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{rot} g(x) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(e) Vergleichen Sie die Resultate aus (c) und aus (d) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.

(a) Skizze von J und $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$:



(b) Wir zerlegen die Kurve K wie in (a) skizziert in drei Teilkurven, $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels

$$C_1 \ : \ [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ t \mapsto C_1(t) = \binom{C_{1,1}(t)}{C_{1,2}(t)} = \binom{t}{0} \ .$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels

$$C_2 \ : \ \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \ : \ t \mapsto C_2(t) = \binom{C_{2,1}(t)}{C_{2,2}(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)} \ .$$

Die Teilkurve K_3 parametrisieren wir mittels

$$C_3 \ : \ [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ t \mapsto C_3(t) = \binom{C_{3,1}(t)}{C_{3,2}(t)} = \binom{0}{1-t} \ .$$

(c) Die Zirkulation wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{Z}(g,K) = \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t)\sin(t) + \cos(t)) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(t)) \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\cos(2t)}{4} + \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Für das dritte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -(1-t)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -1 + 2t - t^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \left[-t + t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Die gesamte Zirkulation ist also gegeben durch

$$\mathrm{Z}(g,K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

(d) Die Rotation von g ist

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 2x_1\,.$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechnen wir das Integral

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2r\cos(\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos(\varphi)\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[\frac{2}{3}\sin(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(e) Wir erhalten

$$\mathrm{Z}(g,K) = \frac{2}{3} = \iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,.$$

Dies bestätigt den Satz von Green im vorliegenden Fall.

Aufgabe 2 (3+1+1 = 5 Punkte)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$xy'' - y' - (x+1)y \;=\; 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und $h(x) = \mathrm{e}^{x}(2x-1)$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Bestimmen Sie für g, h die Wronskimatrix $\mathrm{W}(1)$.
Überprüfen Sie: g, h ist ein Fundamentalsystem der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

Lösung.

(a) Wir bestimmen die Ableitungen

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} & g''(x) &= \mathrm{e}^{-x} \\ h'(x) &= \mathrm{e}^{x}(2x-1) + 2\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(2x+1) & h''(x) &= \mathrm{e}^{x}(2x+1) + 2\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(2x+3)\ . \end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} x\mathrm{e}^{-x} - (-\mathrm{e}^{-x}) - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ 0 &\overset{!}{=} x\mathrm{e}^{x}(2x+3) - \mathrm{e}^{x}(2x+1) - (x+1)\mathrm{e}^{x}(2x-1) \\ &= x\mathrm{e}^{x}(2x+3-2-2x-1) + \mathrm{e}^{x}(-1+1) = 0\ . \end{aligned}$$

Folglich sind beide Funktionen Lösungen der Differentialgleichung.

(b) Für g, h ist $\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e} \\ -\mathrm{e}^{-1} & 3\mathrm{e} \end{pmatrix}$ und $\det(\mathrm{W}(1)) = 3 + 1 = 4 \neq 0$, unter Verwendung der Ableitungen aus (a). Somit bilden g und h ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(c) Jede Lösung ist von der Form

$$f(x) \;=\; c \cdot \mathrm{e}^{-x} + d \cdot \mathrm{e}^{x}(2x-1),$$

wobei $c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (2+4 = 6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x < \pi$ gegeben ist durch

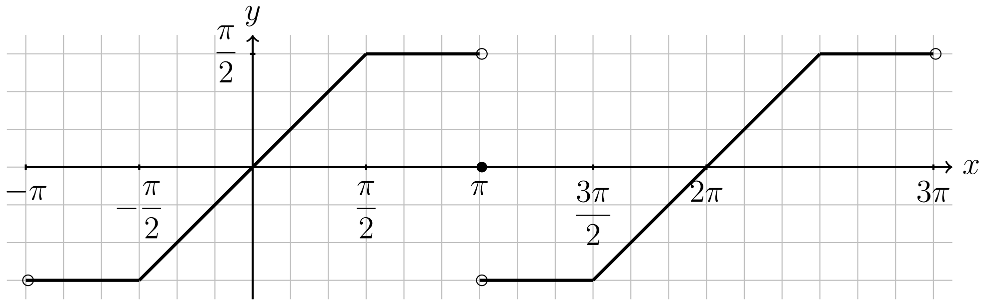
$$f(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi \,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi < x < 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

(a) Skizze von $f(x)$:



(b) Es ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da f ungerade ist.

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) + \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) - \frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos\!\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{n}\cos\!\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n^2\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos\!\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\sin\!\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\cos(n\pi) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\sin\!\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}(-1)^n \,.
\end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\sin\!\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}(-1)^n\right)\sin(nx)\,.$$

Aufgabe 4 (2+1+2+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Es sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie die Wronskimatrix $\mathrm{W_{sys}}(x)$ zum Fundamentalsystem aus (a).
Berechnen Sie $\mathrm{W_{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} -e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} -e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Es ist

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Es ist

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und daher $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Da A zwei verschiedene reelle Eigenwerte hat, ist A reell diagonalisierbar. Also bilden

$$\begin{aligned} f_{[1]}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_{[2]}(x) &= e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem.

(b) Die Wronski-Matrix dieser beiden Lösungen ist $\mathrm{W_{sys}}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & -e^{4x} \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\mathrm{W_{sys}}(x)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & -e^{4x} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-e^{6x}-e^{6x}} \begin{pmatrix} -e^{4x} & -e^{4x} \\ -e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2e^{6x}} \begin{pmatrix} e^{4x} & e^{4x} \\ e^{2x} & -e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ e^{-4x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch rechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{W_{sys}}(x)^{-1} &= \mathrm{W_{sys}}(0)^{-1} \mathrm{W_{sys}}(-x) \mathrm{W_{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{-2x} & 0 \\ 0 & 2e^{-4x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ e^{-4x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_{\mathrm{p}}(x) = c_1(x) f_{[1]}(x) + c_2(x) f_{[2]}(x)$. Hierzu wird

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{-4x} & -\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} .$$

Somit können wir Stammfunktionen $c_1(x) = 0$ und $c_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ wählen.

Es wird

$$f_{\mathrm{p}}(x) = 0 \cdot \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

(d) Jede Lösung von $y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$ ist dank (a) und (c) von der Form

$$f(x) = f_{\mathrm{p}}(x) + d_1 f_{[1]}(x) + d_2 f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d_1 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $d_1,\ d_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (2+2+1 = 5 Punkte)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx}\,,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 3\sin(x) + \sin(3x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$.

(c) Die Funktion $u(\frac{\pi}{2},t)$ besitzt ein globales Maximum auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Bestimmen Sie die Stelle $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, bei der $u(\frac{\pi}{2},t)$ dieses Maximum annimmt.

Lösung.

(a) Da $u(x,0) = f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$, ergeben sich als Fourierkoeffizienten der ungeraden 2π-periodischen Fortsetzung von $f(x)$

$$b_k \;=\; \begin{cases} 3 & \text{für } k=1 \\ 1 & \text{für } k=3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Lösung erhalten wir also mit $L=\pi$ und $a=1$ wegen $\frac{\pi}{L}=1$

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\mathrm{e}^{-k^2 t} = 3\sin(x)\mathrm{e}^{-t} + \sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}\,.$$

(b) Es wird

$$u_x \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(3\sin(x)\mathrm{e}^{-t} + \sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}) \;=\; 3\cos(x)\mathrm{e}^{-t} + 3\cos(3x)\mathrm{e}^{-9t}\,.$$

Es wird

$$u_{xx} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(3\cos(x)\mathrm{e}^{-t} + 3\cos(3x)\mathrm{e}^{-9t}) \;=\; -3\sin(x)\mathrm{e}^{-t} - 9\sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}\,.$$

Es wird

$$u_t \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(3\sin(x)\mathrm{e}^{-t} + \sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}) \;=\; -3\sin(x)\mathrm{e}^{-t} - 9\sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}\,.$$

Also ist in der Tat $u_t = u_{xx}$.

(c) Es ist

$$u(\tfrac{\pi}{2}, t) \;=\; 3\sin(\tfrac{\pi}{2})\mathrm{e}^{-t} + \sin(\tfrac{3\pi}{2})\mathrm{e}^{-9t} \;=\; 3\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-9t}\ .$$

Es wird

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u(\tfrac{\pi}{2}, t) = -3\mathrm{e}^{-t} + 9\mathrm{e}^{-9t} = -3\mathrm{e}^{-t}(1 - 3\mathrm{e}^{-8t})\ .$$

Dies wird genau dann null, wenn $1 = 3\mathrm{e}^{-8t}$ ist, also $\mathrm{e}^{8t} = 3$, also $8t = \ln(3)$.

Somit ist $t_0 = \frac{\ln(3)}{8}$ die einzige kritische Stelle von $u(\frac{\pi}{2}, t)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Da die Existenz eines globalen Maximums auf $\mathbb{R}_{>0}$ als bekannt vorausgesetzt wurde, befindet sich dieses globale Maximum an der Stelle

$$t_0 \;=\; \frac{\ln(3)}{8}\ .$$

Name, Vorname:		**Matrikel-nummer:**	

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \dfrac{x^2+3}{y}$, $y(0) = -1$:

$$f(x) = -\sqrt{\tfrac{2}{3}x^3 + 6x + 1}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei $F(s) = \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+10}$.

Geben Sie die Funktion $f(t)$ an, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ hat:

$f(t) =$ $2\mathrm{e}^{-t}\cos(3t)$

Bestimmen Sie: $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-t} * f(t)) =$ $\dfrac{2}{s^2+2s+10}$

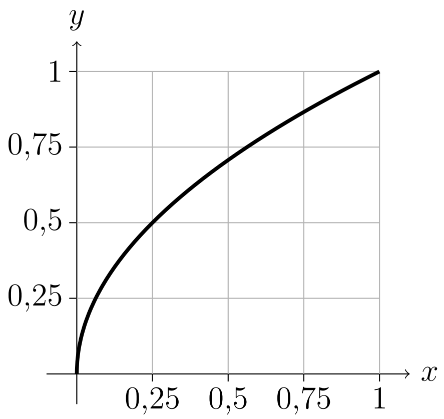
Aufgabe 8 (2 Punkte)

Wir betrachten die Kurve $K = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.

Skizzieren Sie K. Berechnen Sie das Volumen V von R.

Skizze von K:



$V = \dfrac{\pi}{2}$