Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2025** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+4+1 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 2x^2 \mathrm{e}^{-x} \ .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ von $y'' + 4y' + 5y = 2x^2\mathrm{e}^{-x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 5y = 2x^2\mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 2 (1+4+1 = 6 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(a) Sei $B := A - \mathrm{E}_3$ und $v := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man bestimme das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Aufgabe 3 (2+4+2 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \ . \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus (b), um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4}$$

zu berechnen.

Bitte wenden →

Aufgabe 4 (1+1+1+1+3+1 = 8 Punkte)

Sei $J := \left\{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leqslant 1 \right\}$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \mathrm{e}^{u^2+v^2} \end{pmatrix}$. Sei $S := \Phi(J)$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung mit einer Funktion C.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(C(t))$ und deren Ableitung $(\Phi \circ C)'(t)$.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral unter Verwendung von (b).

(d) Bestimmen Sie $\Phi_u \times \Phi_v$.

(e) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (c) und (e) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Aufgabe 5 (1+2+2 = 5 Punkte)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \tfrac{1}{5} u_{xx} \ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \ = \ f(x) \ := \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{array} \right\} \qquad \text{für } x \in [0,1].$$

Die Fourierkoeffizienten b_n der ungeraden 2-periodischen Fortsetzung von f sind für $n \geqslant 1$ gegeben durch $b_n = \dfrac{4}{n^2\,\pi^2} \sin\!\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{5} u_{xx}$.

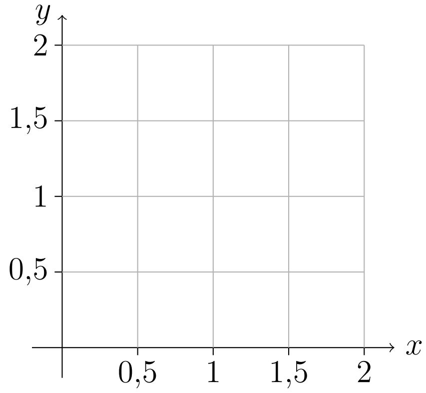
(c) Überprüfen Sie: Die Funktion $u(x,5)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$. Verwenden Sie dazu, dass $b_n = 0$ ist für gerades n.

Name, Vorname:		**Matrikel-nummer:**	

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}x \right\}$.

(a) Skizzieren Sie D.



(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar. Berechnen Sie $\iint_D 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$D =$

$\iint_D 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

Aufgabe 7 (1+1+1 = 3 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 16y = 64t$$

für $y = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung dieses Anfangswertproblems.

Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + 16y = 0$.

(a) Bestimmen Sie $U(s) = \frac{1}{p(s)} =$

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s)) =$

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * 64t =$