Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2025** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+4+1 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 2x^2 \mathrm{e}^{-x} \ .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y'' + 4y' + 5y = 2x^2 \mathrm{e}^{-x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 5y = 2x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist $p(X) = X^2 + 4X + 5$.

Wir berechnen die Nullstellen λ_1, λ_2 mittels der Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\mathrm{i}}{2}$$

und erhalten $\lambda_1 = -2 + \mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -2 - \mathrm{i}$.
Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch:

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin(x) \,, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos(x) \ .$$

(b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = 2x^2$ ein Polynom von Grad 2 und $\mu = -1$ ist.
Da μ keine Nullstelle von $p(X)$ ist, befinden wir uns im Fall ohne Resonanz. Wir setzen daher an

$$f_{\mathrm{p}}(x) = (s_2 x^2 + s_1 x + s_0)\mathrm{e}^{-x}$$

Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist. Es gilt

$$\begin{aligned} p(X-1) &= (X-1)^2 + 4(X-1) + 5 = X^2 - 2X + 1 + 4X - 4 + 5 \\ &= X^2 + 2X + 2 \end{aligned}$$

und daher $p(\mathrm{D} - 1) = \mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 2$.

Nun wenden wir $p(\mathrm{D} - 1)$ auf den Polynomanteil $s_2x^2 + s_1x + s_0$ des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil $2x^2$ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} 2x^2 &\stackrel{!}{=} p(\mathrm{D} - 1)(s_2x^2 + s_1x + s_0) \\ &= (\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 2)(s_2x^2 + s_1x + s_0) \\ &= 2s_2 + 2(2s_2x + s_1) + 2s_sx^2 + 2s_1x + 2s_0 \\ &= 2s_2x^2 + x(4s_2 + 2s_1) + 2s_2 + 2s_1 + 2s_0 \\ x^2 &= s_2x^2 + x(2s_2 + s_1) + s_2 + s_1 + s_0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $s_2 = 1$, $s_1 = -2$ und $s_0 = 1$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = (x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung.

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} f_\mathrm{p}'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\left(s_2x^2 + s_1x + s_0\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(2s_2x + s_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(-s_2x^2 + (2s_2 - s_1)x + s_1 - s_0\right) \\ f_\mathrm{p}''(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\left(-s_2x^2 + (2s_2 - s_1)x + s_1 - s_0\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(s_2(-2x + 2) - s_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(s_2x^2 + (s_1 - 4s_2)x + s_0 - 2s_1 + 2s_2\right)\ . \end{aligned}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} 2x^2\mathrm{e}^{-x} \quad &= \quad \mathrm{e}^{-x}\left(s_2x^2 + (s_1 - 4s_2)x + s_0 - 2s_1 + 2s_2\right) + 4\cdot\mathrm{e}^{-x}\left(-s_2x^2 + (2s_2 - s_1)x + s_1 - s_0\right) \\ &\quad\quad +5\cdot\mathrm{e}^{-x}(s_2x^2 + s_1x + s_0) \\ &= \quad \mathrm{e}^{-x}\left(2s_2x^2 + (2s_1 + 4s_2)x + 2s_0 + 2s_1 + 2s_2\right) \end{aligned}$$

Gelten soll also: $(2s_2x^2 + (2s_1 + 4s_2)x + 2s_0 + 2s_1 + 2s_2) = 2x^2$.

Koeffizientenvergleich liefert $s_2 = 1$, $s_1 = -2$ und $s_0 = 1$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ eine partikuläre Lösung.

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x}\sin(x) + c_2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) + \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x + 1) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (1+4+1 = 6 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(a) Sei $B := A - \mathrm{E}_3$ und $v := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man bestimme das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Lösung.

(a) Es ist $B = A - \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$Bv \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Es wird

$$B^2 v \;=\; B(Bv) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Also ist $k = 2$.

(b) Mit $z := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Az = -z$. Also ist z ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1. Dies gibt die vektorwertige Lösung

$$f_{[1]}(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Wir erhalten außerdem die Lösungen

$$\begin{aligned} f_{[2]}(x) &= \mathrm{e}^{x} \left(\frac{x^0}{0!} B^1 v \right) = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_{[3]}(x) &= \mathrm{e}^{x} \left(\frac{x^1}{1!} B^1 v + \frac{x^0}{0!} B^0 v \right) = \mathrm{e}^{x} \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Wronski-Matrix zu $f_{[1]}(x)$, $f_{[2]}(x)$, $f_{[3]}(x)$ ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{x} & x\mathrm{e}^{x} \\ 0 & 2\mathrm{e}^{x} & (2x-1)\mathrm{e}^{x} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix} .$$

Somit wird

$$\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \,.$$

Da $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \neq 0$, liegt in der Tat ein Fundamentalsystem vor.

(c) Jede Lösung ist von der Form

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; d_1 f_{[1]}(x) + d_2 f_{[2]}(x) + d_3 f_{[3]}(x) \\ &=\; d_1 \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d_3 \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix} \;, \end{aligned}$$

wobei $d_1,\, d_2,\, d_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (2+4+2 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \, . \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

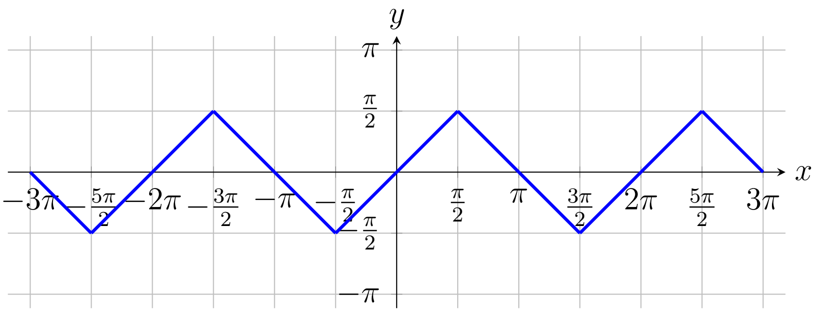
(c) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus (b), um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4}$$

zu berechnen.

Lösung.

(a) Die Skizze ist in der Abbildung dargestellt.



(b) Es ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da f ungerade ist.

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \left[-(\pi - x)\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx).$$

c) Zuerst berechnen wir das Integral des Quadrats der Funktion.

$$\begin{aligned}
||f||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24}\right) \\
&= \frac{\pi^3}{6}\ .
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung von Parseval folgt nun:

$$\begin{aligned}
\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = ||f||^2 = \frac{\pi^3}{6} \\
\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4} &= \frac{\pi^3}{6} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4} &= \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{16} \ = \ \frac{\pi^4}{96}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (1+1+1+1+3+1 = 8 Punkte)

Sei $J := \{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leqslant 1\}$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \mathrm{e}^{u^2+v^2} \end{pmatrix}$. Sei $S := \Phi(J)$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1,x_2,x_3) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung mit einer Funktion C.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(C(t))$ und deren Ableitung $(\Phi \circ C)'(t)$.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral unter Verwendung von (b).

(d) Bestimmen Sie $\Phi_u \times \Phi_v$.

(e) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (c) und (e) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Lösung.

(a) Wir parametrisieren den Rand von J mittels $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$.

(b) Es ist $(\Phi \circ C)(t) := \Phi(C(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \mathrm{e}^{(\cos(t))^2+(\sin(t))^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}$.

Davon die Ableitung ist $(\Phi \circ C)'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Es wird

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} g((\Phi \circ C)(t)) \bullet (\Phi \circ C)'(t) \;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} g\left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ (\cos(t))^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 + \cos(t)^2 \;\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \;\mathrm{d}t = 2\pi \;. \end{aligned}$$

(d) Es wird

$$\Phi_u \times \Phi_v \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u\mathrm{e}^{u^2+v^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v\mathrm{e}^{u^2+v^2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2u\mathrm{e}^{u^2+v^2} \\ -2v\mathrm{e}^{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Zunächst ist

$$\operatorname{rot}(g)(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit wird

$$
\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O &= \iint_J \operatorname{rot}(g)(\Phi(u,v)) \bullet (\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} 0 \\ -2u \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2u\mathrm{e}^{u^2+v^2} \\ -2v\mathrm{e}^{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \iint_J 4uv\mathrm{e}^{u^2+v^2} + 2 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(4r\cos(\varphi) r \sin(\varphi) \mathrm{e}^{(r\cos(t))^2+(r\sin(t))^2} + 2\right) \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} 4r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \mathrm{e}^{(r^2)} + 2r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 4r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \mathrm{e}^{(r^2)} + 2r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 4r^3 \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \mathrm{e}^{(r^2)} + 2r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \left[-r^3 \cos(2\varphi) \mathrm{e}^{(r^2)} + 2r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=1} 4\pi r \, \mathrm{d}r \\
&= [2\pi r^2]_{r=0}^{r=1} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

(f) Wir erhalten

$$
\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x \overset{\text{(c)}}{=} 2\pi \overset{\text{(e)}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O \, .
$$

Dies bestätigt den Satz von Stokes im vorliegenden Fall.

Aufgabe 5 (1+2+2 = 5 Punkte)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \tfrac{1}{5}u_{xx}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \ = \ f(x) \ := \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{array} \right\} \qquad \text{für } x \in [0,1].$$

Die Fourierkoeffizienten b_n der ungeraden 2-periodischen Fortsetzung von f sind für $n \geqslant 1$ gegeben durch $b_n = \dfrac{4}{n^2\,\pi^2}\sin\bigl(n\frac{\pi}{2}\bigr)$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{5}u_{xx}$.

(c) Überprüfen Sie: Die Funktion $u(x,5)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$. Verwenden Sie dazu, dass $b_n = 0$ ist für gerades n.

Lösung.

(a) Mit $a^2 = \frac{1}{5}$ und $L = 1$ ist

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}.$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}n\pi\cos(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}\cos(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}\cos(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} -4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}n\pi\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} -4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\cdot\left(-\frac{n^2\pi^2}{5}\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} -4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{5}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\ . \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $u_t = \frac{1}{5}u_{xx}$.

(c) Es ist

$$u_x(\tfrac{1}{2},5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{=0 \text{ für} \\ n \text{ gerade}}} \underbrace{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{=0 \text{ für} \\ n \text{ ungerade}}} \mathrm{e}^{-n^2\pi^2} = 0 \ .$$

Also liegt bei $x_0 = \frac{1}{2}$ eine kritische Stelle der Funktion $u(x,5)$ vor.

Es ist

$$u_{xx}(\tfrac{1}{2},5) = \sum_{n=1}^{\infty} -4 \underbrace{\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2}}_{\substack{>0 \text{ falls } n \text{ ungerade,} \\ =0 \text{ falls } n \text{ gerade}}} < 0 \ .$$

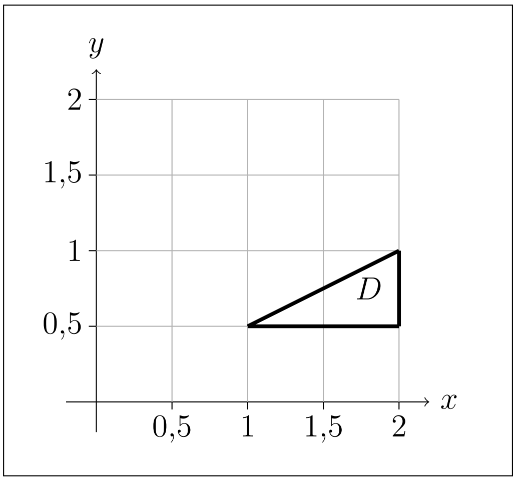
Somit hat die Funktion $u(x,5)$ ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

Name, Vorname:		Matrikelnummer:	

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Sei $D := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}x \right\}$.

(a) Skizzieren Sie D.



(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar. Berechnen Sie $\iint_D 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1,\ 2y \leqslant x \leqslant 2 \right\}$

$\iint_D 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5}{6}$

Aufgabe 7 (1+1+1 = 3 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 16y = 64t$$

für $y = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung dieses Anfangswertproblems.

Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + 16y = 0$.

(a) Bestimmen Sie $U(s) = \frac{1}{p(s)} = \dfrac{1}{s^2+16}$

$\frac{1}{s^2+4^2}$ ist auch richtig.

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s)) = \frac{1}{4}\sin(4t)$

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * 64t = 4t - \sin(4t)$