Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 1

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y \leqslant 2,\ x \leqslant y \leqslant 2x \}$.

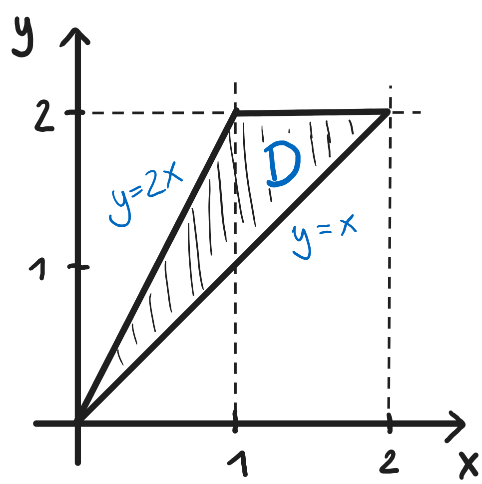
(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösung.

(a) Der Bereich D ist in der Grafik hervorgehoben.



(b) Umschreiben der Bedingungen ergibt $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant 2,\ \frac{1}{2}y \leqslant x \leqslant y \}$ für eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der y-Achse. Es wird

$$\begin{aligned}
\iint_D x - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}y}^{y} x - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 - xy\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 - y^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 -\frac{1}{8}y^2 \,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{24}y^3\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

(c) Sei

$$h(x) \;:=\; \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0,1] \\ 2 & \text{falls } x \in [1,2]\;. \end{cases}$$

Dann ist $D = \{\, \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\; x \leqslant y \leqslant h(x) \,\}$ eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der x-Achse.

Damit wird das Integral berechnet:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x - y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_0^2 \int\limits_x^{h(x)} x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_x^{h(x)} x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \int\limits_x^{h(x)} x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_x^{2x} x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \int\limits_x^{2} x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \left[xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x}^{y=2x} \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x}^{y=2} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \left(2x^2 - 2x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(2x - 2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 -\frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{6} - \frac{8}{6} + 4 - 4 + \frac{1}{6} - 1 + 2 \\
&= -\frac{1}{3}\;.
\end{aligned}$$

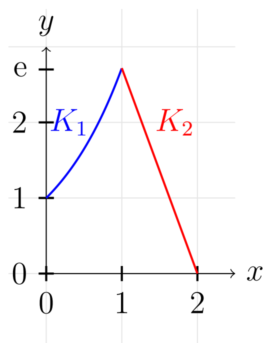
Hausaufgabe 2
Sei $K_1 := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1],\ y = \mathrm{e}^x \}$.
Sei $K_2 := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [1,2],\ y + \mathrm{e}x = 2\mathrm{e} \}$.

(a) Skizzieren Sie K_1 und K_2 in ein Koordinatensystem.

(b) Sei $K := K_1 \cup K_2$.
Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen von R.

Lösung.

(a) Skizze der zwei Kurven K_1 und K_2.



(b) Sei R_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x-Achse entsteht. Sei R_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x-Achse entsteht. Das Volumen von R ergibt sich als Summe der Volumina von R_1 und R_2.

R_1: Die Kurve K_1 ist der Graph der Funktion

$$r_1(x) = \mathrm{e}^x$$

auf $x \in [0,1]$. Wir können zur Berechnung des Volumens V_1 von R_1 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$V_1 = \pi \int_0^1 r_1(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (\mathrm{e}^x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\mathrm{e}^2 - 1 \right) \ .$$

R_2: Die Kurve K_2 ist der Graph der Funktion

$$r_2(x) = 2\mathrm{e} - \mathrm{e}x$$

für $x \in [1,2]$. Wir können zur Berechnung des Volumens V_2 von R_2 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

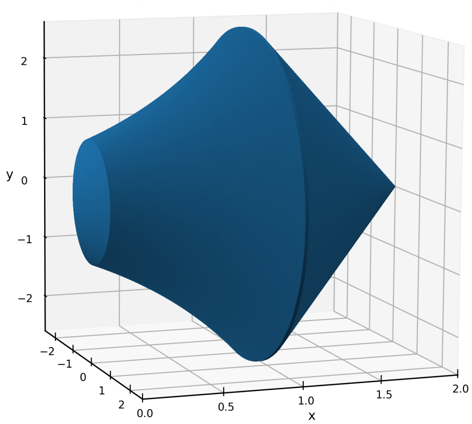
$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^2 r_2(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 (2\mathrm{e} - \mathrm{e}x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^2 \int_1^2 \left(4 - 4x + x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \mathrm{e}^2 \left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \pi \mathrm{e}^2 \left(8 - 8 + \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \pi \mathrm{e}^2 \left(\frac{7}{3} - 2\right) = \frac{1}{3}\pi \mathrm{e}^2 \,. \end{aligned}$$

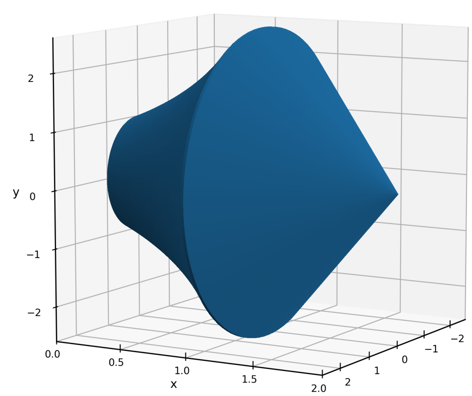
Alternativ: Da R_2 ein Kegel mit Radius $r = \mathrm{e}$ und Höhe $h = 1$ ist, lässt sich V_2 auch als $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \mathrm{e}^2$ berechnen.

R: Somit ergibt sich das Volumen V von R zu

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) + \frac{1}{3}\pi \mathrm{e}^2 = \pi \left(\frac{5}{6}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\right) \,.$$

Illustration (nicht verlangt). Die folgenden Abbildungen zeigen den Drehkörper R:





Hausaufgabe 3

Sei $D := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ -x_1^2 + 2x_1 \leqslant x_2 \leqslant -x_1^2 + 2 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei K die geschlossene Kurve, die D berandet.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{-x_2}{x_1}$.

(a) Skizzieren Sie D. Parametrisieren Sie K positiv orientiert.

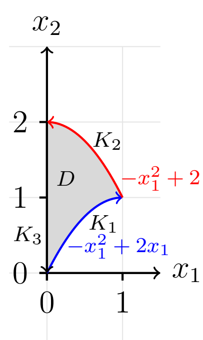
(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.

(a) Skizze von D:



Wir zerlegen die Kurve K wie skizziert in drei Teilkurven, $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.
Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels

$$C_1 \ :\ [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \ :\ t \mapsto C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t^2+2t \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels

$$C_2 \ :\ [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \ :\ t \mapsto C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t^2+2t+1 \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve K_3 parametrisieren wir mittels

$$C_3 \ :\ [0\,,2] \to \mathbb{R}^2 \ :\ t \mapsto C_3(t) = \begin{pmatrix} C_{3,1}(t) \\ C_{3,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix} .$$

(b) Die Zirkulation wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{Z}(g, K) = \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^2 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} t^2-2t \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2t+2 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 t^2 - 2t - 2t^2 + 2t \,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 -t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= -\tfrac{1}{3} \;.
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} t^2-2t-1 \\ 1-t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -2t+2 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 -(t^2 - 2t - 1) + (1-t)(-2t+2) \,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 t^2 - 2t + 3 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{3} - 1 + 3 \\
&= \tfrac{7}{3} \;.
\end{aligned}$$

Für das dritte Integral erhalten wir

$$\int_0^2 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} -2+t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 0 \,\mathrm{d}t = 0 \;.$$

Die gesamte Zirkulation ist also gegeben durch

$$\mathrm{Z}(g, K) \;=\; -\frac{1}{3} + \frac{7}{3} + 0 \;=\; 2 \;.$$

(c) Die Rotation von g ist

$$\operatorname{rot} g(x_1, x_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 1 - (-1) = 2 \,.$$

Wir setzen ein und berechnen das Integral von $\operatorname{rot} g$ über D als Normalbereich bezüglich der x_1-Achse:

$$\iint\limits_D \operatorname{rot} g \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_{-x_1^2+2x_1}^{-x_1^2+2} 2 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 = \int\limits_0^1 \Big[2x_2\Big]_{x_2=-x_1^2+2x_1}^{x_2=-x_1^2+2} \mathrm{d}x_1$$

$$= \int\limits_0^1 -2x_1^2 + 4 + 2x_1^2 - 4x_1 \, \mathrm{d}x_1 = \int\limits_0^1 4 - 4x_1 \, \mathrm{d}x_1$$

$$= \Big[4x_1 - 2x_1^2\Big]_0^1 = 4 - 2 = 2$$

(d) Wir erhalten

$$\mathrm{Z}(g, K) \overset{\text{(b)}}{=} 2 \overset{\text{(c)}}{=} \iint\limits_D \operatorname{rot} g \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, .$$

Dies bestätigt den Satz von Green im vorliegenden Fall.