

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

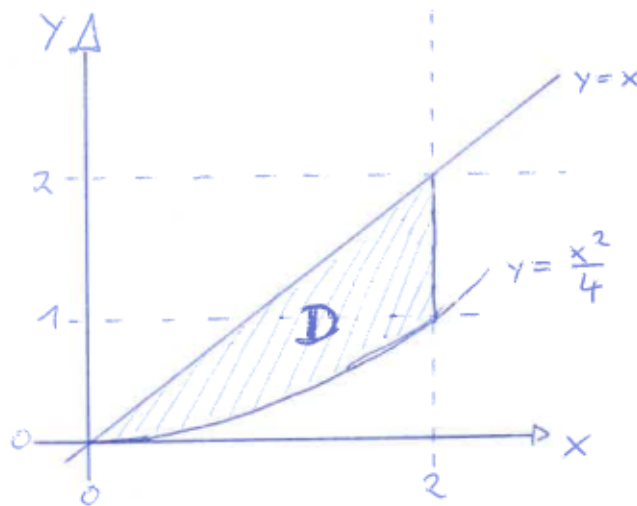
Lösung 1

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, y \leq x, x^2 \leq 4y \}$.

- (a) Skizzieren Sie D .
 (b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x -Achse dar.
 Berechnen Sie damit $\iint_D xy \, dx \, dy$.
 (c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar.
 Berechnen Sie damit $\iint_D xy \, dx \, dy$.

Lösung.

- (a) Der Bereich D ist in der Grafik hervorgehoben.



- (b) Umschreiben der Bedingungen ergibt $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{4} \leq y \leq x \}$ für eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der x -Achse.

Damit wird das Integral berechnet:

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^x xy \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=\frac{x^2}{4}}^x dx \\
 &= \int_0^2 \frac{x^3}{2} - \frac{x \cdot x^4}{2 \cdot 16} dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{6 \cdot 32} \right]_0^2 \\
 &= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

(c) Sei

$$h(y) := \begin{cases} 2\sqrt{y} & \text{falls } y \in [0, 1] \\ 2 & \text{falls } y \in [1, 2] \end{cases}$$

Dann ist $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq h(y) \right\}$ eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der y -Achse.

Es wird

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_y^{h(y)} xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_y^{2\sqrt{y}} xy \, dx \, dy + \int_1^2 \int_y^2 xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=y}^{x=2\sqrt{y}} dy + \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=y}^{x=2} dy \\ &= \int_0^1 2y^2 - \frac{1}{2} y^3 \, dy + \int_1^2 2y - \frac{1}{2} y^3 \, dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{8} y^4 \right]_0^1 + \left[y^2 - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8} \right) - (0 - 0) + \left((4 - 2) - \left(1 - \frac{1}{8} \right) \right) \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 2

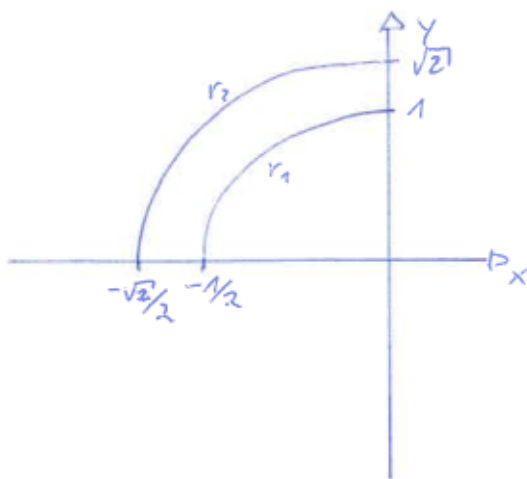
Sei $K_1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \geq 0 \}$.

Sei $K_2 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 2, x \leq 0, y \geq 0 \}$.

- Skizzieren Sie K_1 und K_2 in ein Koordinatensystem.
- Sei R_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x -Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen V_1 von R_1 .
- Sei R_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x -Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen V_2 von R_2 .
- Sei $R := R_2 \setminus R_1$ die Schale, die aus R_2 durch Herausnahme von R_1 entsteht. Berechnen Sie das Volumen V der Schale R .

Lösung.

- Skizze, in welcher K_1 der Graph der Funktion r_1 ist und K_2 der Graph der Funktion r_2 .



- Die Kurve K_1 wird durch die Funktion

$$r_1(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

beschrieben. Wir können für das Volumen V_2 von R_2 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 r_1(x)^2 dx = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 1 - 4x^2 dx = \pi \left[x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

(c) Die Kurve K_2 wird durch die Funktion

$$r_2(x) = \sqrt{2 - 4x^2}$$

beschrieben. Wir können für das Volumen V_2 von R_2 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 r_2(x)^2 dx = \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 2 - 4x^2 dx = \pi \left[2x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \\ &= \pi \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

(d) Das Volumen der Schale $R := R_2 \setminus R_1$ ist die Differenz der einzelnen Volumina:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 3

Sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_1^2 \leq x_2 \leq x_1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

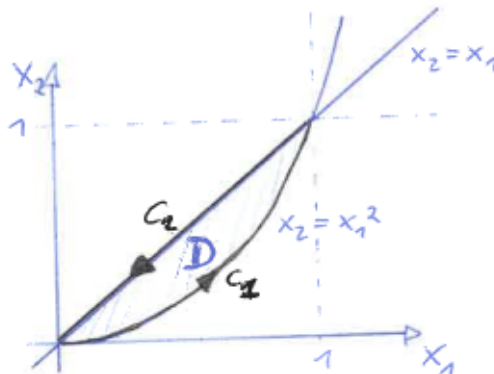
Sei K die geschlossene Kurve, von der D berandet wird, positiv orientiert parametrisiert.

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \end{pmatrix}$.

- Skizzieren Sie D .
- Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, K) = \int_K g(x) \cdot dx$ als Kurvenintegral.
- Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g(x) dx_1 dx_2$ als Gebietsintegral.
- Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.

- Die Skizze hebt auch gleich die Parametrisierungen C_1 und C_2 hervor:



- Die Zirkulation wird durch Anwendung der Formel

$$Z(g, K) = \int_K g(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{a_j}^{b_j} g(C_j(t)) \cdot C_j'(t) dt$$

berechnet.

Wir betrachten den in der Abbildung dargestellten Bereich D und die positiv orientierte Kurve K , die ihn umschließt. Wir zerlegen die Kurve K wie folgt in $\ell = 2$ Teilkurven:

$$K = K_1 \cup K_2.$$

Für jede Teilkurve verwenden wir eine Parametrisierung:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } t \in [0, 1] & C_1'(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ C_2(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} & \text{für } t \in [0, 1] & C_2'(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für jede Teilkurve berechnen wir den Beitrag zur Zirkulation:

$$Z_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^4 - 2t^3 dt = \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$$

$$Z_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

Daraus ergibt sich die Zirkulation $Z(g, K) = Z_1 + Z_2 = -\frac{3}{10}$.

(c) Nun berechnen wir

$$\iint_D \operatorname{rot} g(x) dx_1 dx_2.$$

Wir wenden die Definition der Rotation an und erhalten

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2.$$

Wir setzen ein und berechnen das Integral über D als Normalbereich bezüglich der x_1 -Achse:

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{rot} g(x) dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_{x_1^2}^{x_1} -2x_1 - 2x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 [-2x_1x_2 - x_2^2]_{x_2=x_1^2}^{x_2=x_1} dx_1 \\ &= \int_0^1 (-2x_1^2 - x_1^2) - (-2x_1^3 - x_1^4) dx_1 = \int_0^1 -3x_1^2 + 2x_1^3 + x_1^4 dx_1 \\ &= \left[-x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{5}x_1^5 \right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

(d) Es wird

$$Z(g, K) \stackrel{(b)}{=} -\frac{3}{10} \stackrel{(c)}{=} \iint_D \operatorname{rot} g(x) dx_1 dx_2,$$

was den Satz von Green im vorliegenden Fall bestätigt.