Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 2

Hausaufgabe 4 Sei $J := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1^2 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{x_1 x_2}{x_1^2}$.

(a) Skizzieren Sie J. Parametrisieren Sie K positiv orientiert.

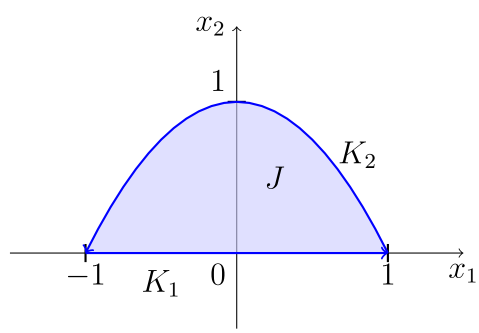
(b) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(c) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und aus (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Der Bereich J ist in der Grafik hervorgehoben.



Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels

$$C_1 \;:\; [-1\,,1] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_1(t) = \binom{C_{1,1}(t)}{C_{1,2}(t)} = \binom{t}{0} \;.$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels

$$C_2 \;:\; [-1\,,1] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_2(t) = \binom{C_{2,1}(t)}{C_{2,2}(t)} = \binom{-t}{1-t^2} \;.$$

(b) Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{A}(g, K) = \int_{-1}^{1} g(C_1(t)) \bullet \binom{C'_{1,2}(t)}{-C'_{1,1}(t)} \,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} g(C_2(t)) \bullet \binom{C'_{2,2}(t)}{-C'_{2,1}(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} g(C_1(t))\bullet\begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} -t^2 \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \,.$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g(C_2(t))\bullet\begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} -t+t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} 3t^2 - 2t^4 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{5} - \left(-1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5} \,.
\end{aligned}$$

Der gesamte Ausfluss ist also gegeben durch

$$\mathrm{A}(g, K) = -\frac{2}{3} + \frac{6}{5} = \frac{8}{15} \,.$$

(c) Zuerst berechnen wir die Divergenz des Vektorfeldes g.

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = x_2 + 0 = x_2$$

Dann berechnen wir das Integral der Divergenz über das Gebiet J.

$$\begin{aligned}
\iint_J \operatorname{div} g \;\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x_1^2} x_2 \;\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_{x_2=0}^{x_2=1-x_1^2} \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-x_1^2)^2}{2} \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 + x_1^4 - 2x_1^2 \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{x_1^5}{5} - \frac{2}{3}x_1^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \left(-1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)\right) = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \,.
\end{aligned}$$

(d) Wir erhalten

$$\mathrm{A}(g, K) \overset{\text{(b)}}{=} \frac{8}{15} \overset{\text{(c)}}{=} \iint_J \operatorname{div} g \;\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \,.$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.

Hausaufgabe 5 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \}$.

(a) Verwenden Sie die Polarkoordinatentransformation ψ.

Finden Sie $B \subseteq \{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$ mit $\psi(B) = D$.

(b) Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem. Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_D \frac{1}{4 - \sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

mittels einer Substitution unter Verwendung von ψ.

Lösung.

(a) Die Polarkoordinatentransformation $\psi : B \to D$ ist gegeben durch

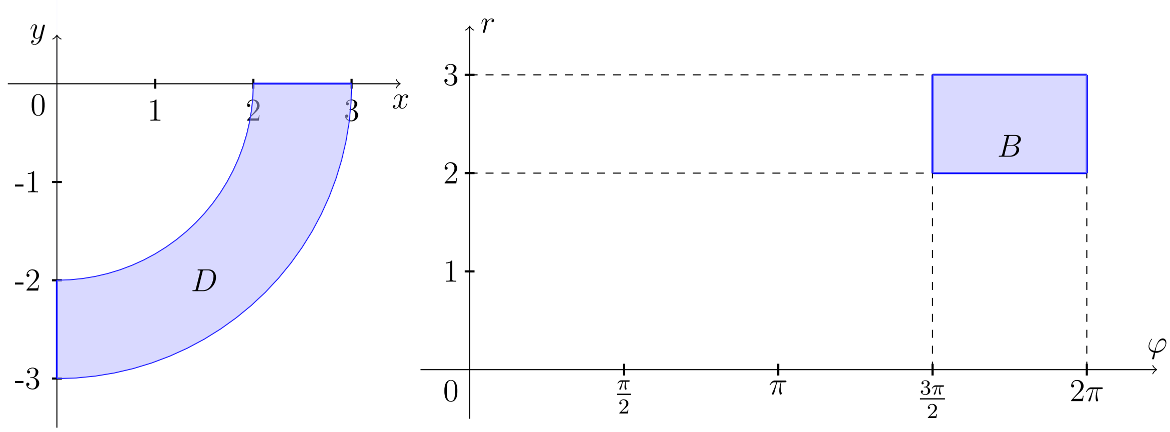
$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$B := \{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leqslant r \leqslant 3,\ \tfrac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \}\ .$$

Es ist dann $\psi(B) = D$.

(b) Die beiden Skizzen zeigen D im x-y-Koordinatensystem und B im r-φ-Koordinatensystem.



(c) Um das Integral zu berechnen, wenden wir zunächst die Polarkoordinatentransformation an. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{4-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_B \frac{1}{4-\sqrt{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2}}\; r\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_2^3 \frac{1}{4-r}\; r\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_2^3 \frac{r}{r-4}\;\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{(*)}{=} -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_2^3 \frac{r-4+4}{r-4}\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_2^3 1+\frac{4}{r-4}\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left[r+4\ln(|r-4|)\right]_2^3\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3+4\ln(|3-4|)-2-4\ln(|2-4|)\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 1-4\ln(2)\mathrm{d}\varphi \\
&= -(2\pi-\tfrac{3\pi}{2})(1-4\ln(2)) \\
&= \tfrac{\pi}{2}\left(4\ln(2)-1\right)\;.
\end{aligned}
$$

In $(*)$ kann alternativ auch Polynomdivision verwandt werden, bei der Durchführung welcher dann nur ein Rechenschritt benötigt wird.

Hausaufgabe 6 Sei $B := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \}$.
Sei $\psi : \mathbb{R}^2_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^2 : \binom{u}{v} \mapsto \psi(u,v) = \binom{u+v}{2\ln(1+v)}$.
Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^2$.

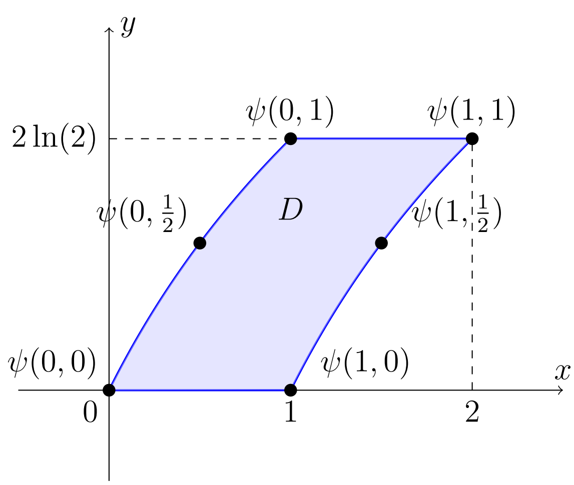
(a) Skizzieren Sie $\psi(0,0)$, $\psi(0,\frac{1}{2})$, $\psi(0,1)$, $\psi(1,0)$, $\psi(1,\frac{1}{2})$, $\psi(1,1)$ in der x-y-Ebene.
Dabei kann $2\ln(1{,}5) \approx 0{,}8$ und $2\ln(2) \approx 1{,}4$ verwendet werden.
Skizzieren Sie D in der x-y-Ebene.

(b) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $|\det \mathrm{J}\psi(u,v)|$.

(c) Bestimmen Sie das Integral
$$\iint_D \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
mittels einer Substitution unter Verwendung von ψ.

Lösung.

(a) Berechnen wir die Funktion $\psi(u,v)$ an den angegebenen Punkten.
$$\psi(0,0) = \binom{0}{0} \qquad \psi(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2\ln(\frac{3}{2}) \end{pmatrix} \qquad \psi(0,1) = \binom{1}{2\ln(2)}$$
$$\psi(1,0) = \binom{1}{0} \qquad \psi(1,\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2\ln(\frac{3}{2}) \end{pmatrix} \qquad \psi(1,1) = \binom{2}{2\ln(2)}$$
Die sechs berechneten Werte können verwendet werden, um das Skizzieren von D zu erleichtern.



(b) Wir berechnen die Jacobi-Matrix
$$\mathrm{J}\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{1+v} \end{pmatrix} .$$
Wir erhalten
$$|\det \mathrm{J}\psi(u,v)| = \frac{2}{|1+v|} = \frac{2}{1+v} ,$$
da $v \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und also $1+v > 0$.

(c) Um das Integral zu berechnen, wenden wir die Koordinatentransformation ψ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_B \mathrm{e}^{2\ln(1+v)} \frac{2}{1+v} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (1+v)^2 \frac{2}{1+v} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 1+v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= 2 \int_0^1 (1+v)(1-0) \,\mathrm{d}v \\
&= 2 \int_0^1 1+v \,\mathrm{d}v \\
&= 2 \left[v + \frac{v^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3 \,.
\end{aligned}$$