Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 3

Hausaufgabe 7

Sei $J := \{ \binom{\varphi}{\vartheta} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, 2\pi] \}$.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{\vartheta} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (2+\sin(\vartheta))\cos(\varphi) \\ (2+\sin(\vartheta))\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

Es ist $S := \Phi(J)$ ein Torus in $\mathbb{R}^3$.

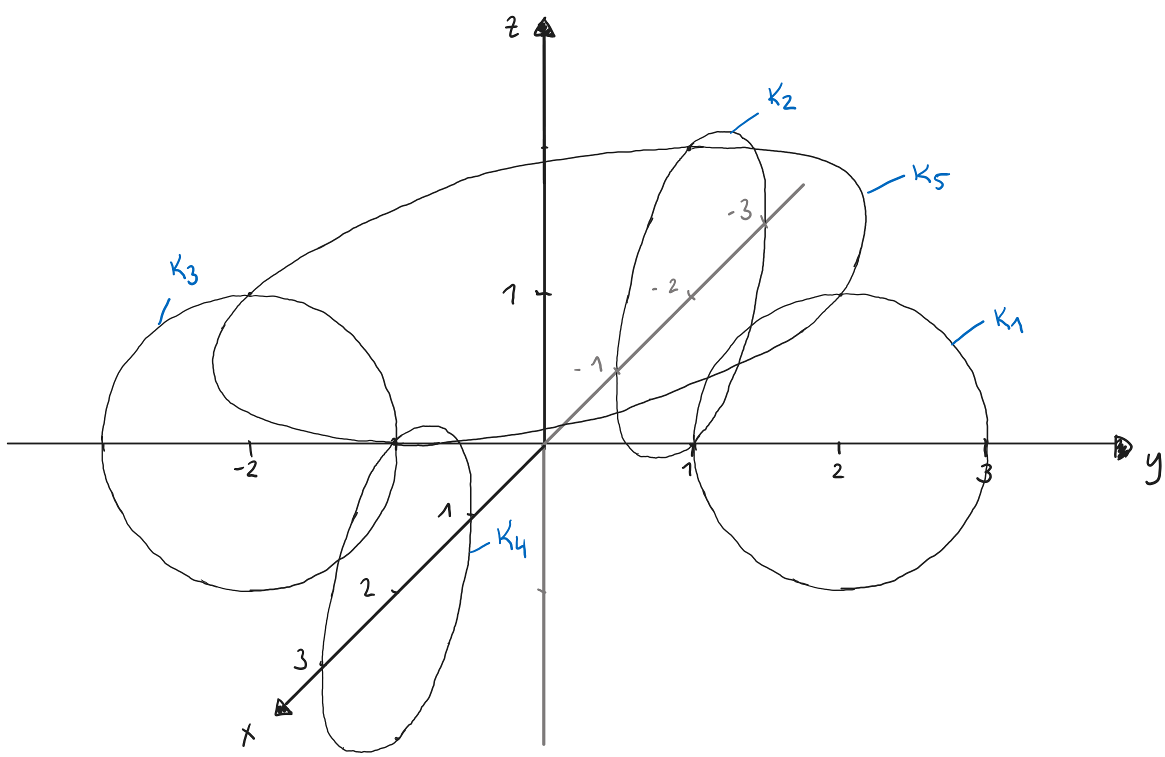
(a) Skizzieren Sie die Teilmengen $\{ \Phi(0, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\frac{\pi}{2}, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\pi, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\frac{3\pi}{2}, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}$ und $\{ \Phi(\varphi, 0) \mid \varphi \in [0, 2\pi] \}$ von S in ein gemeinsames x-y-z-Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.

Lösung.

(a) Die Skizze zeigt die folgenden Teilmengen des Torus:

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \{ \Phi(\tfrac{\pi}{2}, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}, \\
K_2 &:= \{ \Phi(\pi, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}, \\
K_3 &:= \{ \Phi(\tfrac{3\pi}{2}, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}, \\
K_4 &:= \{ \Phi(2\pi, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \} = \{ \Phi(0, \vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \}, \\
K_5 &:= \{ \Phi(\varphi, 0) \mid \varphi \in [0, 2\pi] \}
\end{aligned}$$



(b) Es ist

$$\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -(2+\sin(\vartheta))\sin(\varphi) \\ (2+\sin(\vartheta))\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{aligned}\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} -(2+\sin(\vartheta))\sin(\varphi) \\ (2+\sin(\vartheta))\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)(2+\sin(\vartheta))\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)(2+\sin(\vartheta))\sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta)\sin(\varphi)^2(2+\sin(\vartheta)) - \cos(\vartheta)\cos(\varphi)^2(2+\sin(\vartheta)) \end{pmatrix} = -(2+\sin(\vartheta)) \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

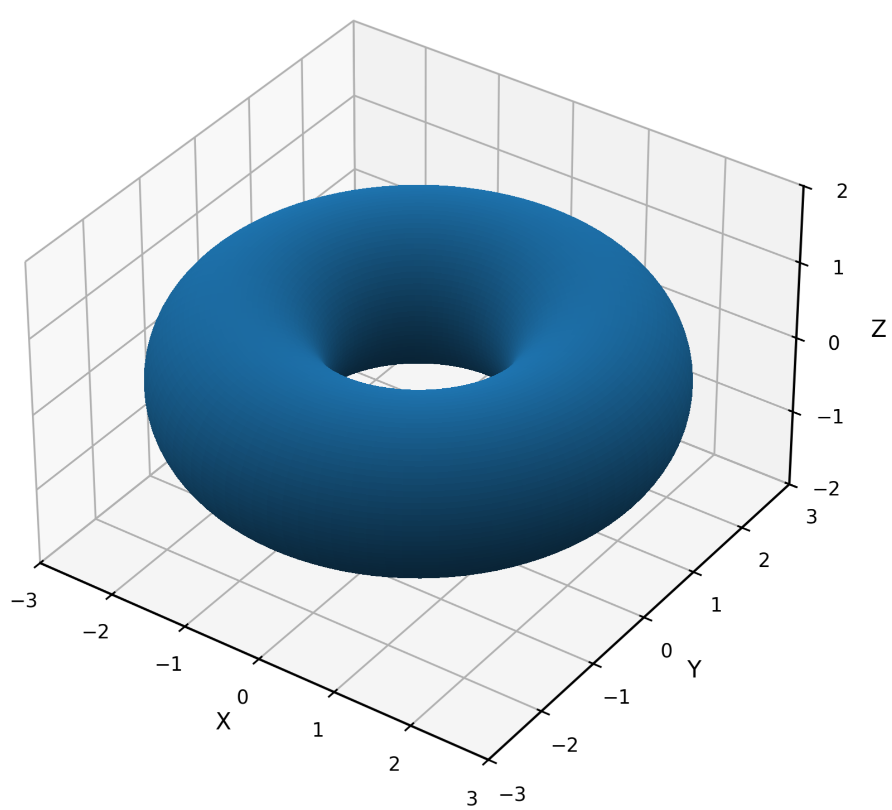
Also wird

$$\begin{aligned}|\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta)| &= (2+\sin(\vartheta))\sqrt{\sin(\vartheta)^2\cos(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^2} \\ &= (2+\sin(\vartheta))\sqrt{\sin(\vartheta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) + \cos(\vartheta)^2} \\ &= (2+\sin(\vartheta))\sqrt{\sin(\vartheta)^2 + \cos(\vartheta)^2} = (2+\sin(\vartheta))\sqrt{1} = 2+\sin(\vartheta) .\end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(S) &= \iint_J |\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta)|, \mathrm{d}\vartheta, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 2+\sin(\vartheta), \mathrm{d}\vartheta, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [2\vartheta - \cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 4\pi - 1 - 0 + 1\,\mathrm{d}\varphi = [4\pi\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 8\pi^2 .\end{aligned}$$

Illustration (nicht verlangt). Die folgende Abbildung zeigt den Torus:



Hausaufgabe 8

Sei $J := \{ \binom{\varphi}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [0, \pi],\ v \in [-2, 2] \}$.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{v} \mapsto \Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ v \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\varphi, v)$, $\Phi_v(\varphi, v)$ und $\Phi_\varphi(\varphi, v) \times \Phi_v(\varphi, v)$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Berechnen Sie

$$\iint_S x + y^2 \, \mathrm{d}O.$$

Lösung.

(a) Es ist $\Phi_\varphi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 0 \\ 2\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\Phi_v(\varphi, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist $\Phi_\varphi(\varphi, v) \times \Phi_v(\varphi, v) = \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 0 \\ 2\cos(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi) \\ 0 \\ -2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(b) Es wird

$$|\Phi_\varphi(\varphi, v) \times \Phi_v(\varphi, v)| = \sqrt{4\cos(\varphi)^2 + 4\sin(\varphi)^2} = 2 \ .$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\iint_S x + y^2 \, \mathrm{d}O &= \iint\limits_J (2\cos(\varphi) + v^2) \cdot |\Phi_\varphi(\varphi, v) \times \Phi_v(\varphi, v)| \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \int\limits_0^\pi \int\limits_{-2}^2 2\cos(\varphi) + v^2 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int\limits_0^\pi \left[2\cos(\varphi) v + \frac{1}{3} v^3 \right]_{v=-2}^{v=2} \mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \int\limits_0^\pi 8\cos(\varphi) + \frac{16}{3} \, \mathrm{d}\varphi = 2 \left[8\sin(\varphi) + \frac{16}{3}\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \\
&= \frac{32}{3}\pi \ .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 9 Wir begeben uns in die Situation von Platzaufgabe 8:
Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \right\}$.
Sei $J := \{ \binom{\varphi}{\vartheta} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, \pi],\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$. Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{\vartheta} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

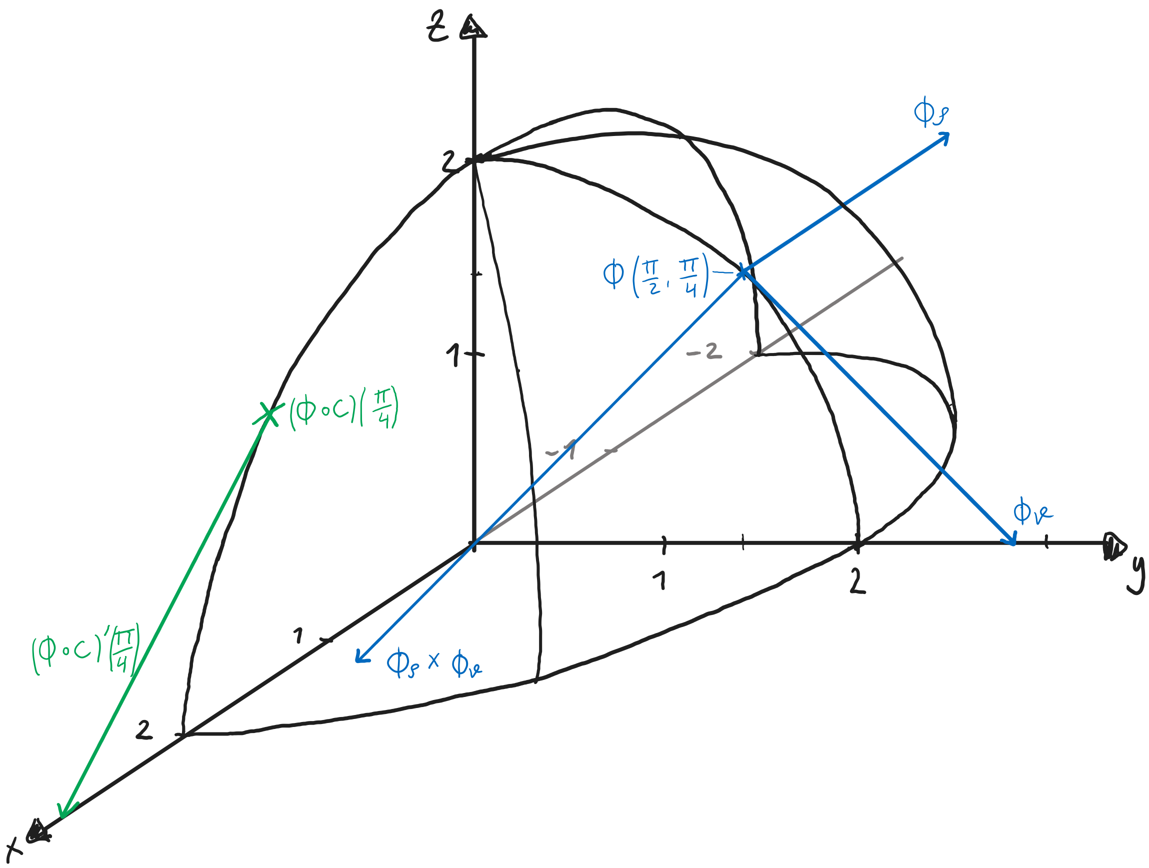
(a) Skizzieren Sie $S = \Phi(J)$ im x-y-z-Koordinatensystem.

(b) Markieren Sie den Punkt $\Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ in der Skizze aus (a) und zeichnen Sie daran ansetzend die Vektoren $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $\Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ und $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \times \Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein.

(c) Es parametrisiert $C : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{0}{t}$ einen Teil des Randes von J.
Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)(t)$ und $(\Phi \circ C)'(t)$. Zeichnen Sie den Punkt $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4})$ und, daran ansetzend, den Vektor $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$ ein.

Lösung.

(a) Skizze von S und den Vektoren $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $\Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ sowie $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \times \Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ am Punkt $\Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ (blau) und $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$ am Punkt $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4})$ (grün):



(b) Es ist $\Phi(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -2\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \Phi_\vartheta(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Also ist $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) \times \Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) Es ist $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(0,t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t)\cos(0) \\ 2\sin(t)\sin(0) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 0 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$ und $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Also ist $(\Phi \circ C)'(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 0 \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$ und $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.