Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 4

Hausaufgabe 10 Sei $J := \{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 9\}$.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix}$.

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie $S := \Phi(J)$. Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung mit einer Funktion C. Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)(t)$ sowie $(\Phi \circ C)'(t)$.

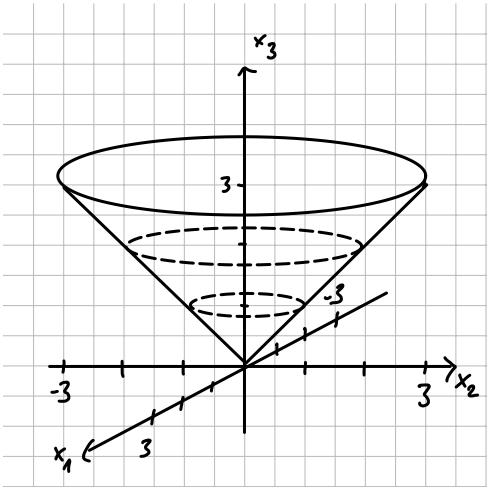
(b) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral unter Verwendung von (a).

(c) Berechnen Sie $\iint_S \mathrm{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral. Verwenden Sie hierzu Polarkoordinaten für J.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Lösung.

(a) Skizze:



Parametrisierung des Randes von J: Da J die Kreisfläche mit Radius 3 um den Ursprung ist, ist der Rand eine Kreislinie mit Radius 3 um den Ursprung. Diese kann folgendermaßen positiv orientiert parametrisiert werden:

$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \; t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$(\Phi \circ C)(t) = \Phi(3\cos(t), 3\sin(t)) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ \sqrt{(3\cos(t))^2+(3\sin(t))^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$(\Phi \circ C)'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir erhalten für die Zirkulation

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} g((\Phi \circ C)(t)) \bullet (\Phi \circ C)'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} g(3\cos(t),\, 3\sin(t),\, 3) \bullet \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 9\cos(t)^2 - 9\sin(t)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 9\sin(t)^2 + 9\cos(t)^2 \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 9 \ \mathrm{d}t \\
&= 18\pi .
\end{aligned}$$

(c) Zunächst ist

$$\mathrm{rot}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2x_1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Für das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen folgt:

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nun ergibt sich unter Verwendung von Polarkoordinaten für J

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O &= \iint_J \operatorname{rot}(g)(\Phi(u,v)) \bullet (\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J \operatorname{rot}(g) \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right) \bullet \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}u \;\mathrm{d}v \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} -2v \\ -2u \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}u \;\mathrm{d}v \\
&= \iint_J \frac{4uv}{\sqrt{u^2+v^2}} + 2 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4r\cos(\varphi) r \sin(\varphi)}{r} + 2 \right) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi) + 2r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r^2 \left(\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) + 2r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^3 [-r^2 \cos(2\varphi) + 2r\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^3 -r^2 + 4\pi r - (-r^2 + 0) \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^3 4\pi r \,\mathrm{d}r = [2\pi r^2]_{r=0}^{r=3} = 18\pi \ .
\end{aligned}$$

(d) Wir erhalten

$$\int_{\partial S} g(x) \bullet \,\mathrm{d}x \overset{\text{(b)}}{=} 18\pi \overset{\text{(c)}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O \ .$$

Dies bestätigt den Satz von Stokes im vorliegenden Fall.

Hausaufgabe 11

Sei $B := \{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi] \ , \vartheta \in [0, \pi] \}$.

Es parametrisiert $\Phi : B \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ 2r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ das Ellipsoid $E := \Phi(B)$.

(a) Skizzieren Sie die Schnittmenge von E mit der x-z-Ebene in ein x-z-Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie den Betrag der Funktionaldeterminante $|\det \mathrm{J}\Phi(r, \varphi, \vartheta)|$.

(c) Berechnen Sie $\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung von (b).

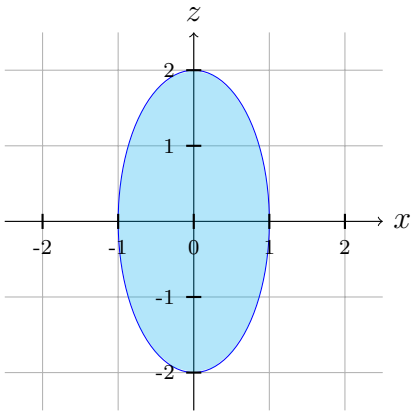
Lösung.

(a) Für den Schnitt mit der x-z-Ebene gehen wir wie folgt vor.

Wir setzen zum einen $\varphi = 0$ und erhalten $\Phi(r, 0, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta) \\ 0 \\ 2r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $r \in [0,1]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$. Dies parametrisiert eine halbe Ellipse samt innerer Fläche.

Wir setzen zum anderen $\varphi = \pi$ und erhalten $\Phi(r, \pi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -r\sin(\vartheta) \\ 0 \\ 2r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $r \in [0,1]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$. Dies liefert die andere Hälfte derselben Ellipse, samt innerer Fläche.

Insgesamt erhalten wir folgende Skizze:



(b) Für die Jacobi-Matrix ergibt sich

$$\mathrm{J}\Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) & r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) & r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) & r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ 2\cos(\vartheta) & 0 & -2r\sin(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Dies entspricht der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten, wobei die dritte Zeile mit 2 multipliziert wurde. Dies liefert eine Abkürzung zum Resultat.

Wenn wir rechnen, erhalten wir, mit den Abkürzungen $\mathrm{s}_\varphi = \sin(\varphi)$, $\mathrm{c}_\varphi = \cos(\varphi)$, etc., bei Entwicklung nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{J}\Phi(r,\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} \mathrm{c}_\varphi \mathrm{s}_\vartheta & -r\mathrm{s}_\varphi \mathrm{s}_\vartheta & r\,\mathrm{c}_\varphi \mathrm{c}_\vartheta \\ \mathrm{s}_\varphi \mathrm{s}_\vartheta & r\,\mathrm{c}_\varphi \mathrm{s}_\vartheta & r\mathrm{s}_\varphi \mathrm{c}_\vartheta \\ 2\,\mathrm{c}_\vartheta & 0 & -2r\mathrm{s}_\vartheta \end{pmatrix} \\
&= 2\,\mathrm{c}_\vartheta(-r^2\mathrm{s}_\varphi^2\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta - r^2\,\mathrm{c}_\varphi^2\,\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta) - 2r\mathrm{s}_\vartheta(r\,\mathrm{c}_\varphi^2\,\mathrm{s}_\vartheta^2 + r\mathrm{s}_\varphi^2\mathrm{s}_\vartheta^2) \\
&= -2\,\mathrm{c}_\vartheta\, r^2\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta - 2r\mathrm{s}_\vartheta r\mathrm{s}_\vartheta^2 \\
&= -2r^2\mathrm{s}_\vartheta\ .
\end{aligned}$$

Also ist

$$|\det \mathrm{J}\Phi(r,\varphi,\vartheta)| = |-2r^2\sin(\vartheta)| = 2r^2\sin(\vartheta)\ .$$

(c) Es wird

$$\begin{aligned}
& \iiint_E x^2+y^2+z^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\overset{\text{(b)}}{=}\ & \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(r^2\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)^2 + r^2\sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)^2 + 4r^2\cos(\vartheta)^2\right) 2r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(r^2\sin(\vartheta)^2\underbrace{(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2)}_{=1} + 4r^2\cos(\vartheta)^2\right) 2r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\underbrace{r^2\sin(\vartheta)^2 + r^2\cos(\vartheta)^2}_{=r^2} + 3r^2\cos(\vartheta)^2\right) 2r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1 2r^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1+3\cos(\vartheta)^2)\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
\overset{\substack{u=\cos(\vartheta)\\ \mathrm{d}u=-\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}}{=}\ & \int_0^1 2r^4 \int_0^{2\pi}\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} -(1+3u^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1 2r^4 \int_0^{2\pi} [-u-u^3]_{u=1}^{u=-1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1 2r^4 \int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
=\ & \int_0^1 16\pi r^4\,\mathrm{d}r = 16\pi\left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{16}{5}\pi\ .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12 Wir betrachten das Paraboloid $P := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}$.
Sei S die Oberfläche von P. Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie das Paraboloid P.

(b) Berechnen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n \, \mathrm{d}O$ als Flächenintegral.

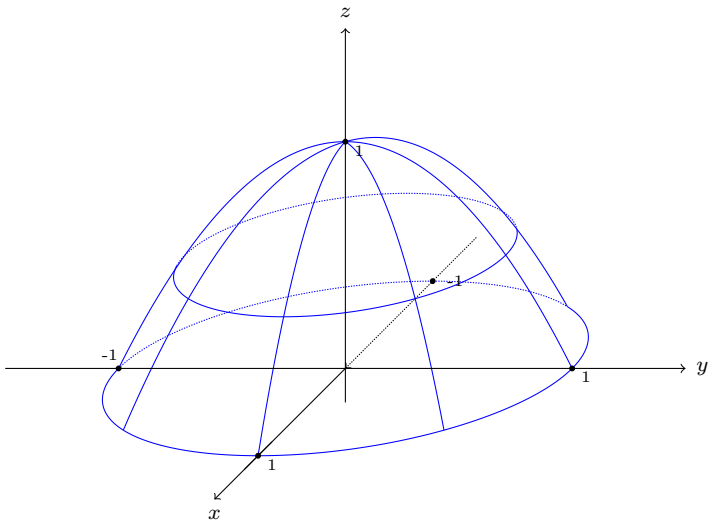
(c) Berechnen Sie $\iiint_P \operatorname{div}(g) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ als Gebietsintegral unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Es ist P rotationsymmetrisch um die z-Achse. Für $x = 0$ ergibt sich die Fläche, die durch $0 \leqslant z \leqslant 1 - y^2$ beschrieben wird. Diese wird um die z-Achse rotiert.

Skizze von P:



(b) Sei

$$J := \{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 1\} \; .$$

Wir parametrisieren zunächst die Unterseite des Paraboloids, also die Kreisfläche in der x-y-Ebene, mittels

$$\widetilde{\Phi_1} : J \to \mathbb{R}^3 : \; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen die Orientierung von $(\widetilde{\Phi_1})_u(u, v) \times (\widetilde{\Phi_1})_v(u, v)$. Es ist

$$(\widetilde{\Phi_1})_u(u, v) \times (\widetilde{\Phi_1})_v(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Ein Blick in die Skizze zeigt, dass dieser Vektor ins Innere des Körpers P zeigt, also nicht wie gewünscht nach außen. Abhilfe schafft die Vertauschung der u- und v-Koordinaten in $\widetilde{\Phi_1}$. Wir definieren also

$$\Phi_1 : J \to \mathbb{R}^3 : \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$(\Phi_1)_u(u,v) \times (\Phi_1)_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, von der Fläche aus, wie gewünscht nach unten und daher nach außen.

Die Mantelfläche, die das Paraboloid nach oben begrenzt, wird parametrisiert durch

$$\Phi_2 : J \to \mathbb{R}^3 : \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen die Orientierung von $(\Phi_2)_u(u,v) \times (\Phi_2)_v(u,v)$. Es ist

$$(\Phi_2)_u(u,v) \times (\Phi_2)_v(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

An der positiven z-Koordinate ist zu erkennen, dass dies nach oben und damit wie gewünscht nach außen zeigt.

Wir berechnen zunächst den Anteil des Ausflusses von g durch $\Phi_1(J) = S_1$ unter Verwendung von Polarkoordinaten für J. Es wird

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} g \bullet n \,\mathrm{d}O &= \iint_J g(\Phi_1(u,v)) \bullet ((\Phi_1)_u(u,v) \times (\Phi_1)_v(u,v)) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J g\,(v,u,0) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} v \\ u \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= -\iint_J u^2 + v^2 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left((r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2\right) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= -2\pi \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r = -2\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Anteil des Ausflusses von g durch $\Phi_2(J) = S_2$ unter Verwendung

von Polarkoordinaten für J. Es wird

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} g \bullet n \,\mathrm{d}O &= \iint_J g(\Phi_2(u,v)) \bullet ((\Phi_2)_u(u,v) \times (\Phi_2)_v(u,v)) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J g\left(u, v, 1-u^2-v^2\right) \bullet \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \iint_J 3u^2 + 3v^2 \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3(r\cos(\varphi))^2 + 3(r\sin(\varphi))^2\right) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 3r^3 \,\mathrm{d}r \\
&= 6\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Der Ausfluss für die gesamte Oberfläche S ergibt sich durch Addition der Anteile:

$$\mathrm{A}(g,S) = \iint_S g \bullet n \,\mathrm{d}O = \iint_{S_1} g \bullet n \,\mathrm{d}O + \iint_{S_2} g \bullet n \,\mathrm{d}O = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi \ .$$

(c) Die Divergenz von g ist

$$\mathrm{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 1 + 1 + 0 = 2 \ .$$

Wir ermitteln die Grenzen des Paraboloids P in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
P &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - r^2\right\} \ .
\end{aligned}$$

Wir berechnen das Gebietsintegral mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\begin{aligned}
\iiint_P \operatorname{div}(g)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_P 2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} 2 \cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r(1-r^2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 2\pi \cdot 2r(1-r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi \int_0^1 r - r^3\,\mathrm{d}r = 4\pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} = \pi
\end{aligned}$$

(d) Der Satz von Gauß sagt aus, dass das Integral der Divergenz aus (c) gleich dem Ausfluss durch die gesamte Oberfläche aus (b) ist.

Wir haben erhalten:

$$\mathrm{A}(g,S) \overset{\text{(b)}}{=} \pi \overset{\text{(c)}}{=} \iiint_P \operatorname{div}(g)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.