Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 4

Hausaufgabe 10 Sei $S := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ 0 \leqslant x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$.

Wir verwenden die Parametrisierung $\Phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(J) = S$. Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung stückweise mit Funktionen C_j .

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie das Flächenintegral $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Lösung.

(a) Da $x_3 \geqslant 0$, ist $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Da $x_1 \geqslant 0$ und $x_2 \geqslant 0$, ist $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Also ist

$$J \;=\; \{ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \vartheta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \} \;=\; [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [0, \tfrac{\pi}{2}]\,.$$

Als Parametrisierungen der Randstücke (also der Kanten) von J verwenden wir

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) && (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]) \\ C_2(t) &= \left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t \end{smallmatrix}\right) && (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]) \\ C_3(t) &= \left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{2} - t \\ \frac{\pi}{2} \end{smallmatrix}\right) && (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]) \\ C_4(t) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} - t \end{smallmatrix}\right) && (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}])\,. \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen zunächst $\Phi \circ C_j$ und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ C_1)(t) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & (\Phi \circ C_1)'(t) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\Phi \circ C_2)(t) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{smallmatrix}\right) & (\Phi \circ C_2)'(t) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{smallmatrix}\right) \\ (\Phi \circ C_3)(t) &= \left(\begin{smallmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & (\Phi \circ C_3)'(t) &= \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\Phi \circ C_4)(t) &= \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right) & (\Phi \circ C_4)'(t) &= \left(\begin{smallmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass die Kante in J, die mit C_1 parametrisiert wurde, auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Das ist aber kein Problem.

Nun können wir jeweils $g(\Phi(C_j(t))$ bilden und in folgende Integrale einsetzen. Dabei verwenden wir, dass $\sin(t)^2+\cos(t)^2=1$ ist.

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} g(x)\bullet\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}0\\\cos(t)\\-\sin(t)\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\\cos(t)\\-\sin(t)\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t\\ &+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-\cos(t)\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\cos(t)\\-\sin(t)\\0\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}0\\\sin(t)\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-\sin(t)\\0\\\cos(t)\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t\\ &=0+\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t+0+0=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen die Rotation

$$\operatorname{rot} g(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}\partial/\partial x_1\\\partial/\partial x_2\\\partial/\partial x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$\begin{aligned}\Phi_\varphi(\varphi,\vartheta)\times\Phi_\vartheta(\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\-\sin(\vartheta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)-\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

senkrecht zu S.
Es ist also auch $\operatorname{rot} g(\Phi(\varphi,\vartheta))=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$. Damit setzen wir ein:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}(g)\bullet n\,\mathrm{d}O &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2\\-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,[\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\sin(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= [\vartheta-\tfrac{1}{2}\sin(2\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Hier haben wir $\sin(\vartheta)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$ benutzt, was sich aus dem Additionstheorem des Cosinus oder aus $\sin(\vartheta)^2=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta})=-\frac{1}{4}(2\cos(2\vartheta)-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$ ergibt.

(c) Es ist

$$\int_{\partial S} g(x)\bullet\,\mathrm{d}x \overset{\text{(b)}}{=} \frac{\pi}{2} \overset{\text{(c)}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(g)\bullet n\,\mathrm{d}O\,.$$

Dies bestätigt im vorliegenden Fall den Satz von Stokes.

Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 11

Wir betrachten den Pyramidenstumpf

$$P \ := \ \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [1,2],\ x \in [-z,z],\ y \in [-z,z] \} \ .$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \mapsto \psi(u,v,z) := \begin{pmatrix} zu \\ zv \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie P.

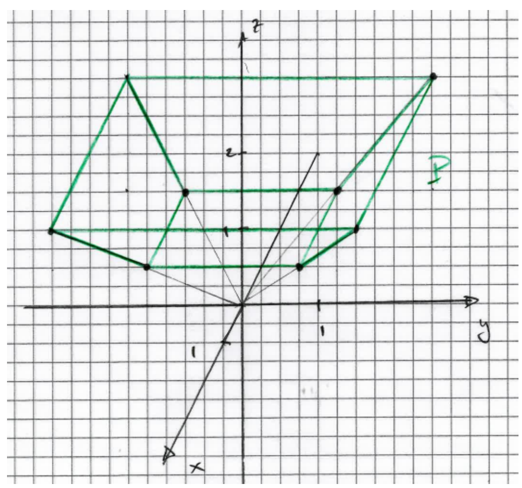
(b) Bestimmen Sie $J \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\psi(J) = P$.

(c) Berechnen Sie $|\det \mathrm{J}\psi(u,v,z)|$.

(d) Berechnen Sie $\iiint_P x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung von ψ und der Transformationsformel.

Lösung.

(a) Sktizze des Pyramidenstumpfs P:



(b) Zunächst sollte $z \in [1,2]$ sein.

Aus $-z \leqslant x \leqslant z$ erhalten wir die Bedingung $-z \leqslant zu \leqslant z$, also $-1 \leqslant u \leqslant 1$, d.h. $u \in [-1,1]$.

Aus $-z \leqslant y \leqslant z$ erhalten wir die Bedingung $-z \leqslant zv \leqslant z$, also $-1 \leqslant v \leqslant 1$, d.h. $v \in [-1,1]$.

Somit wird

$$J \ = \ \{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, u \in [-1,1],\ v \in [-1,1],\ z \in [1,2] \} \ .$$

(c) Wir stellen die Jacobi-Matrix auf und berechnen die Determinante:

$$|\det \mathrm{J}\psi(u,v,z)| = \left| \det \begin{pmatrix} z & 0 & u \\ 0 & z & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |z^2| = z^2$$

(d) Anwenden der Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}
\iiint_P x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_1^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (zu)^2 z^2 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^2 z^4 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^2 \int_{-1}^1 [\tfrac{1}{3}u^3]_{u=-1}^{u=1} z^4 \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^2 \int_{-1}^1 \tfrac{2}{3} z^4 \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z \\
&= \tfrac{4}{3} \int_1^2 z^4 \,\mathrm{d}z \\
&= \tfrac{4}{3} [\tfrac{1}{5} z^5]_{z=1}^{z=2} \;=\; \tfrac{4}{15}(32-1) \;=\; \tfrac{124}{15}\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12 Wir betrachten den Kegel $K := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,2],\ x^2 + y^2 \leqslant z^2 \}$.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x,y,z) := \left(\begin{smallmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie den Kegel K.

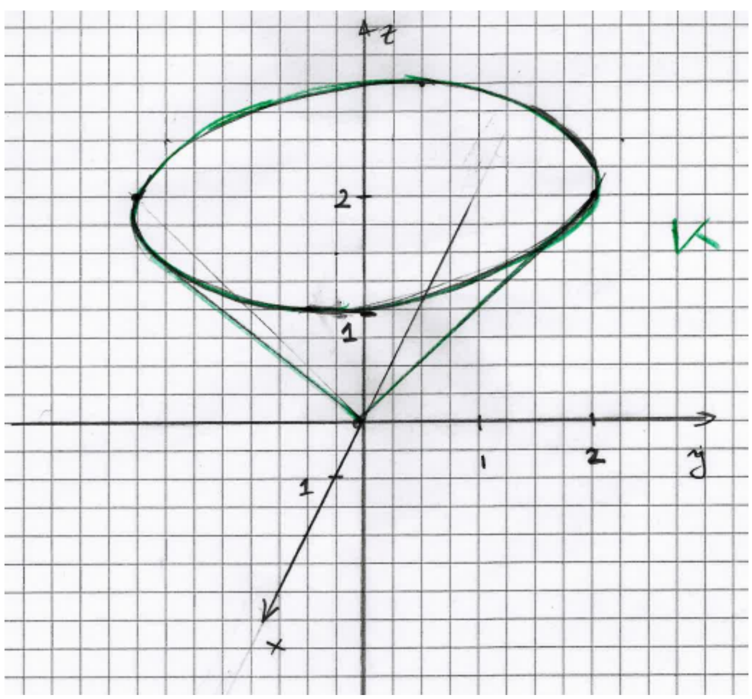
(b) Berechnen Sie $\iiint_K \operatorname{div} g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ als Volumenintegral unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

(c) Berechnen Sie $\iint_{\partial K} g \bullet n \, \mathrm{d}O$ als Flächenintegral.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Kegel:



(b) Wir benutzen Zylinderkoordinaten wie in 2.3.6:

$$\zeta(r,\varphi,z) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{smallmatrix}\right)$$

Es ist $\det \mathrm{J}\zeta(r,\varphi,z) = r$.

Da über einen Kegel integriert wird, ist der maximale Radius in Zylinderkoordinaten nicht konstant: $r \in [0,z]$.

Es sollte $z \in [0,2]$ sein. Es sollte $\varphi \in [0,2\pi]$ sein. Da $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, sollte

$$(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 \ \leqslant\ z^2$$

sein, d.h. $r^2 \leqslant z^2$. Da ohnehin $r \geqslant 0$ ist, folgt $r \in [0, z]$.

Die Divergenz berechnen wir als

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{\partial}{\partial y}2y + \frac{\partial}{\partial z}2z = 2+2+2 = 6\ .$$

Mittels der Transformationsformel berechnen wir nun das Volumenintegral:

$$\begin{aligned}\iiint_K \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^z 6r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 6\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}[z^3]_{z=0}^{z=2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 8\,\mathrm{d}\varphi = 16\pi\end{aligned}$$

(c) Um die Oberfläche ∂K abzudecken, parametrisieren wir den Mantel und den Deckel des Kegels K getrennt.

Den Deckel parametrisieren wir mit Polarkoordinaten in der um 2 nach oben verschobenen x-y-Ebene mit

$$\Phi_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 2\end{pmatrix}$$

für $r \in [0,2]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Der resultierende Vektor senkrecht zur Fläche ∂K ist

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\end{pmatrix}$$

Ein Blick in die Skizze zeigt, dass dieser Vektor vom Körper K weg zeigt. Wir müssen das Vorzeichen also nicht drehen.

Ferner ist $g(\Phi_1(r,\varphi)) = g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), 2) = \begin{pmatrix} 2r\cos(\varphi) \\ 2r\sin(\varphi) \\ 4\end{pmatrix}$.

Den Mantel parametrisieren wir mit Zylinderkoordinaten unter Verwendung von $r = z$ mit

$$\Phi_2(\varphi, z) = \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ z\end{pmatrix}$$

für $z \in [0,2]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Der resultierende Vektor senkrecht zur Fläche ist

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z\sin(\varphi) \\ z\cos(\varphi) \\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ -z\end{pmatrix}$$

Ein Blick in die Skizze zeigt, dass dieser Vektor vom Körper K weg zeigt: man beachte, daß die dritte Koordinate negativ ist. Wir müssen das Vorzeichen also nicht drehen.

Ferner ist $g(\Phi_2(r,\varphi)) = g(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), z) = \begin{pmatrix} 2z\cos(\varphi) \\ 2z\sin(\varphi) \\ 2z\end{pmatrix}$.

Nun berechnen wir das Flächenintegral:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial K} g \bullet n \,\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} 2r\cos(\varphi) \\ 2r\sin(\varphi) \\ 4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\end{pmatrix}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} 2z\cos(\varphi) \\ 2z\sin(\varphi) \\ 2z\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ -z\end{pmatrix}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^2 2z^2\underbrace{(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 - 1)}_{=0}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}[2r^2]_{r=0}^{r=2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 8\,\mathrm{d}\varphi = 16\pi\end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\iiint_K \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{\text{(b)}}{=} 16\pi \overset{\text{(c)}}{=} \iint_{\partial K} g \bullet n \,\mathrm{d}O \,.$$

Dies bestätigt im vorliegenden Fall den Satz von Gauß.