

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 5**Hausaufgabe 13** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1}.$$

- (a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung.
 (b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.
 (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1}, \quad y(1) = 1.$$

Lösung.

- (a) Wir schreiben die rechte Seite der Differentialgleichung wie folgt.

$$y' = g(x) \cdot h(y) = -\frac{1}{x^2 + 1} \cdot y^3,$$

wobei $g(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$ und $h(y) = y^3$.Die Nullstellen von $h(y)$ sind die konstanten Lösungen. Also haben wir als einzige konstante Lösung $f(x) = 0$.

- (b) Mit Trennung der Variablen: Da
- $x^2 + 1 \neq 0$
- für alle
- $x \in \mathbb{R}$
- , ist

$$(x^2 + 1)y' = -y^3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Integration liefert

$$\frac{1}{2y^2} = -\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

D.h. weitere Lösungen der DGL sind gegeben durch

$$f(x) = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2 \arctan(x) + 2c}}.$$

Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ aus Teilaufgabe (a) sind dies alle Lösungen der gegebenen DGL.

- (c) Wir setzen die Anfangsbedingung
- $f(1) = 1 > 0$
- in die Lösungen aus Teilaufgabe (b) ein und erhalten

$$1 \stackrel{!}{=} f(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \arctan(1) + 2c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2c}}.$$

Daraus folgt $\frac{\pi}{2} + 2c = 1$, also $c = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \arctan(x) + 1 - \frac{\pi}{2}}}.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) = 0,$$

wobei $y \in (0, \pi)$.

(a) Sei $\arccos(x) := \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, definiert für $x \in [-1, +1]$.

Verifizieren Sie: Es ist $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Verifizieren Sie: Es ist $\arccos(\cos(x)) = x$ für $x \in [0, \pi]$.

Skizzieren Sie den Graphen von $\arccos : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arccos(x)$.

(b) Finden Sie alle konstanten Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Finden Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Lösung.

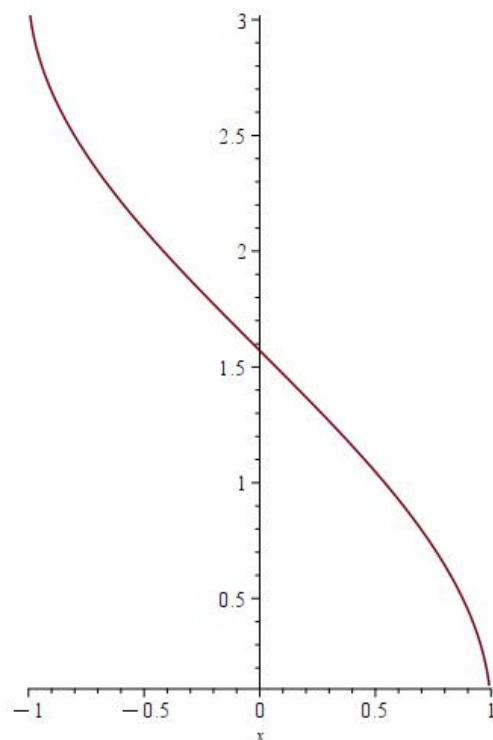
(a) Mit dem Additionstheorem wird

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) = \cos(x).$$

Damit sowie mit der Definition $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(x)) &= \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= x. \end{aligned}$$

Graph von \arccos :



(b) Wir schreiben die Differentialgleichung

$$y' = 2x \cdot \frac{\cos(y)}{\sin(y)}.$$

Konstante Lösungen sind die Nullstellen von $\frac{\cos(y)}{\sin(y)}$, also die Nullstellen von $\cos(y)$. Da $y \in (0, \pi)$, ist $f(x) = \frac{\pi}{2}$ die einzige konstante Lösung dieser Differentialgleichung.

(c) Es ist

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \cdot y' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = 2x dx.$$

Integration liefert mittels $u = \cos(y)$, $du = -\sin(y)$, zunächst

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = - \int \frac{1}{u} du = [-\ln(|u|)] = [-\ln(|\cos(y)|)]$$

Also wird

$$-\ln(|\cos(y)|) = \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = \int 2x dx = x^2 + c$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

Auflösen nach y liefert

$$\cos(y) = \pm e^{-x^2+c},$$

Somit erhalten wir

$$f(x) = y = \arccos(\pm e^{-x^2+c}) = \arccos(\pm e^c \cdot e^{-x^2}),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = \frac{\pi}{2}$ aus Teilaufgabe (b) sind dies alle Lösungen der gegebenen DGL.

(d) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = \pi/4$ liefert

$$\frac{\pi}{4} \stackrel{!}{=} f(0) = \arccos(\pm e^c)$$

und also

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) = \pm e^c.$$

Wir brauchen das positive Vorzeichen, erhalten $e^c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und damit

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}\right)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Hausaufgabe 15 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y \cos(x) + \sin(2x).$$

- (a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Finden Sie alle Lösungen von $y' = y \cos(x) + \sin(2x)$.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y \cos(x) + \sin(2x) \quad \text{und} \quad y(\pi/2) = 0.$$

Lösung.

- (a) Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$y' - y \cos(x) = 0,$$

diese ist eine lineare DGL erster Ordnung. Aus der Vorlesung kennt man die allgemeine Lösung

$$y(x) = k e^{-G(x)}$$

einer solchen Gleichung. Hierbei ist

$$G(x) = \int (-\cos(x)) \, dx = -\sin(x).$$

Damit sind die Lösungen der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = k \cdot e^{\sin(x)}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

- (b) Um eine Partikulärlösung zu finden, verwenden wir Variation der Konstanten, d.h. wir setzen den Ansatz

$$f_p(x) = k(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

in die DGL ein und erhalten mit

$$f_p'(x) = k'(x)e^{\sin(x)} + k(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$$

die Bedingung

$$k'(x)e^{\sin(x)} + k(x)\cos(x)e^{\sin(x)} - k(x) \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \stackrel{!}{=} \sin(2x).$$

Daraus folgt

$$k'(x)e^{\sin(x)} = \sin(2x),$$

also

$$k'(x) = \sin(2x)e^{-\sin(x)}.$$

Aufleiten gibt, unter Verwendung der Substitution $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x) dx$,

$$\begin{aligned} [k(x)] &= \int \sin(2x)e^{-\sin(x)} dx \\ &= \int 2 \sin(x) \cos(x)e^{-\sin(x)} dx \\ &= \int 2te^{-t} dt \\ &= [2t(-e^{-t})] - \int 2(-e^{-t}) dt \\ &= [2e^{-t}(-t - 1)] \\ &= [2e^{-\sin(x)}(-\sin(x) - 1)] \end{aligned}$$

Damit wird

$$f_p(x) = k(x) \cdot e^{\sin(x)} = 2(-\sin(x) - 1) .$$

Jede Lösung der DGL ist also von der Form

$$f(x) = f_p(x) + f_h(x) = 2(-\sin(x) - 1) + d \cdot e^{\sin(x)} ,$$

wobei $d \in \mathbb{R}$.

(Alternativ kann man zur Berechnung von $f_p(x)$ auch die bereitgestellte Formel verwenden.)

(c) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(\pi/2) = 0$ liefert

$$0 \stackrel{!}{=} f(\pi/2) = 2(-\sin(\pi/2) - 1) + d \cdot e^{\sin(\pi/2)} = -4 + d \cdot e^1 ,$$

und also $d = 4e^{-1}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$f(x) = 2(-\sin(x) - 1) + 4e^{-1} \cdot e^{\sin(x)} = 2(-\sin(x) - 1) + 4e^{\sin(x)-1} .$$