Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 5

Hausaufgabe 13 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(x-1)y' + y^2 \;=\; 0$$

für $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

(a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x-1)y' + y^2 \;=\; 0\;, \qquad y(2) = 1.$$

Lösung.

(a) Wir schreiben die Differentialgleichung in eine Form, die es erlaubt, die Variablen zu trennen. Es ist $x - 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Daher ist

$$y' = g(x) \cdot h(y) = -\frac{1}{x-1} y^2$$

wobei $g(x) = -\frac{1}{x-1}$ und $h(y) = y^2$.

Wir finden die konstanten Lösungen der Differentialgleichung, indem wir die Nullstellen von $h(y) = y^2$ bestimmen: Die einzige Nullstelle ist $y = 0$. Also haben wir als einzige konstante Lösung $f(x) = 0$.

(b) Trennung der Variablen: Es ist

$$-(x-1)y' = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = -(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\;.$$

Integration liefert

$$\left[-\frac{1}{y}\right] \;=\; \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \;=\; -\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln(|x-1|)]\;,$$

und also

$$-\frac{1}{y} \;=\; -\ln(|x-1|) - c\;,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

Da $x \in \mathbb{R}_{>1}$ ist, ist $x - 1 > 0$ und wir können den Betrag weglassen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= -\ln(x-1) - c \\ y &= \frac{1}{\ln(x-1) + c} \end{aligned}$$

D.h. weitere Lösungen der Differentialgleichung sind gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)+c}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Zusammen mit der konstanten Lösung $y = 0$ aus Teilaufgabe (a) sind dies alle Lösungen.

(c) Wir setzen die Anfangsbedingung $f(2) = 1$ ein und erhalten

$$f(2) = \frac{1}{\ln(2-1) + c} \overset{!}{=} 1 \ .$$

Daraus folgt $\frac{1}{0+c} \overset{!}{=} 1$, also $c = 1$.

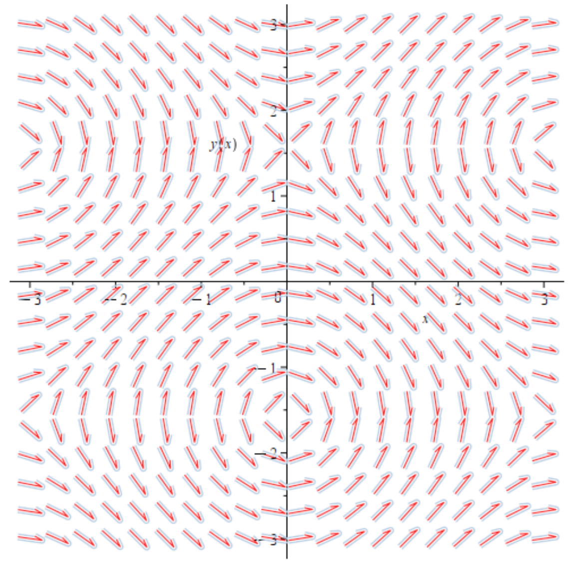
Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x-1) + 1}.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\;.$$

Das Richtungsfeld ist rechts dargestellt.



(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\;, \quad y(0) \;=\; 0\;.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\;, \quad y(\tfrac{\pi}{4}) \;=\; 0\;.$$

(c) Überprüfen Sie: Es ist $f(x) \;=\; x + \frac{\pi}{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung – wie im Richtungsfeld bereits erkennbar.

Lösung.
Gemeinsame Rechnung zu (a, b):
Es ist $y' + \dfrac{\sin(x)}{\cos(y)} = 0$ genau dann, wenn $y' = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)}$ ist, d.h. wenn $\cos(y)\,\mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.
Integration liefert

$$[\sin(y)] \;=\; \int \cos(y)\,\mathrm{d}y \;=\; -\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = [\cos(x)]\;,$$

also

$$\sin(y) = \cos(x) + c\;,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ein und bestimmen so den Wert von c:

$$\sin(0) \;\overset{!}{=}\; \cos(0) + c\;,$$

Dies führt auf $c = -1$.
Mit $y = f(x)$ und

$$\sin(f(x)) \;=\; \cos(x) - 1$$

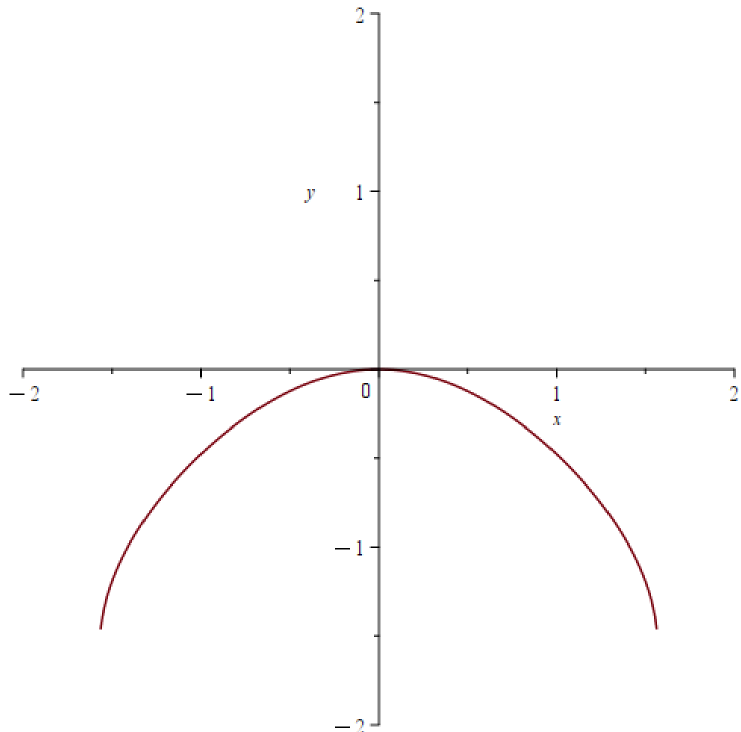
erhalten wir

$$f(x) \;=\; \arcsin(\cos(x) - 1)\;.$$

Tatsächlich ist dann

$$f(0) \;=\; \arcsin(\cos(0) - 1) \;=\; \arcsin(0) = 0 \;.$$

Graph von $f(x)$ (nicht verlangt):



(b) Wir setzen die Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ ein und bestimmen so den Wert von c:

$$\sin(0) \;\stackrel{!}{=}\; \cos(\tfrac{\pi}{4}) + c \;,$$

Dies führt auf $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mit $y = f(x)$ und

$$\sin(f(x)) \;=\; \cos(x) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

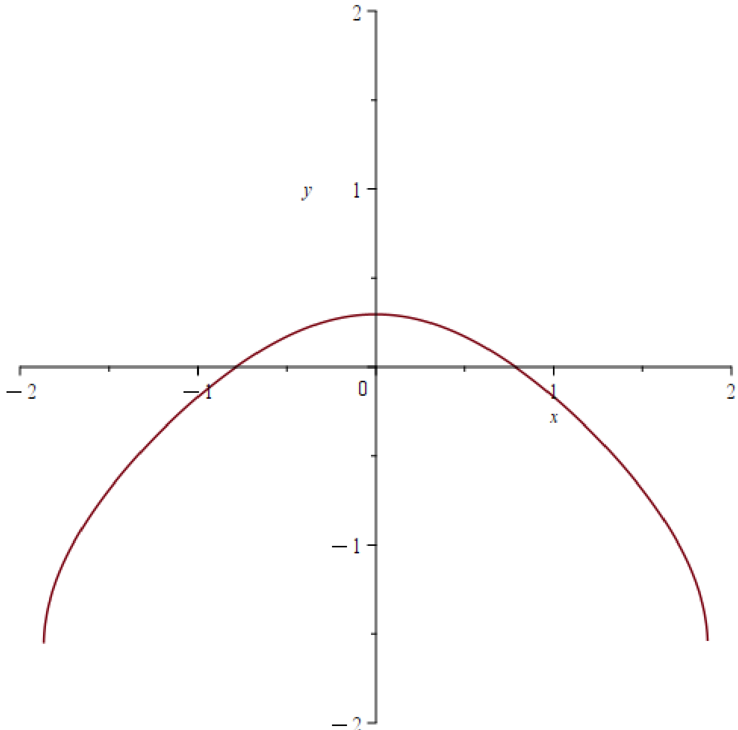
erhalten wir

$$f(x) \;=\; \arcsin(\cos(x) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \;.$$

Tatsächlich ist dann

$$f(\tfrac{\pi}{4}) \;=\; \arcsin(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \;=\; \arcsin(0) = 0 \;.$$

Graph von $f(x)$ (nicht verlangt):



(c) Wir setzen $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ in die Differentialgleichung ein und verwenden das Additionstheorem $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$ für $u, v \in \mathbb{C}$.

Es ist dann in der Tat

$$\begin{aligned}
f'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(f(x))} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin(x)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1} \\
&= 1 - 1 = 0\ .
\end{aligned}$$

Somit ist $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Hausaufgabe 15 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x^2} \; = \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x) \; ,$$

wobei $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen von $y' - \frac{y}{x^2} \; = \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x)$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{y}{x^2} \; = \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x) \; , \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) \; = \; 1 \; .$$

Lösung.

(a) Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0.$$

ist von der Form $y'(x) + g(x) \cdot y = 0$ mit $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Wir rechnen

$$[G(x)] = \int g(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x}\right]$$

und nehmen $G(x) = \frac{1}{x}$.
Damit sind die Lösungen der homogenen Gleichung gegeben durch

$$f_{\mathrm{h}}(x) = C\mathrm{e}^{-G(x)} = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$.

(b) Um eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung zu finden, verwenden wir Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz

$$f_{\mathrm{p}}(x) = k(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

und bestimmen $k(x)$ als eine Stammfunktion von $b(x)\mathrm{e}^{G(x)}$, wobei $b(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x)$ die rechte Seite der Differentialgleichung ist.
Wir erhalten

$$b(x)\mathrm{e}^{G(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \sin(x) \; ,$$

rechnen

$$[k(x)] = \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]$$

und nehmen $k(x) = -\cos(x)$.

Wir erhalten nun die partikuläre Lösung

$$f_{\mathrm{p}}(x) = k(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = -\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung sind somit von der Form

$$f(x) = f_{\mathrm{p}}(x) + f_{\mathrm{h}}(x) = -\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \ ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$.

(c) Wir setzen die Anfangsbedingung $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ein und bestimmen so den Wert von C. Wir erhalten die Bedingung

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad = \quad -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} + C\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} \ \overset{!}{=} \ 1$$

Daraus folgt $C\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} \overset{!}{=} 1$ und also $C = \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$f(x) = -\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}} - \cos(x)\right).$$