Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 6

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} + y^{(2)} - 2y^{(1)} = 0$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die betrachtete Differentialgleichung. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y^{(3)} + y^{(2)} - 2y^{(1)} = 0$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ und $y''(0) = 10$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^3 + X^2 - 2X = X(X^2 + X - 2).$$

Ausklammern von X liefert die erste Nullstelle $\lambda_1 = 0$.

Wir berechnen nun die verbleibenden zwei Nullstellen λ_2, λ_3 mittels der Mitternachtsformel

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

und erhalten $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$.

Insgesamt ist also

$$p(X) \;=\; X(X-1)(X+2)\ .$$

Da die Nullstellen von $p(X)$ alle verschieden und reell sind, erhalten wir als Fundamentalsystem daraus:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} = 1\ , \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} = \mathrm{e}^{x}\ , \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_3 \cdot x} = \mathrm{e}^{-2x}\ . \end{aligned}$$

Alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung sind also von der Form

$$f(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-2x}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Die Wronski-Matrix ist

$$\mathrm{W}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & -2\mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & 4\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} \;.$$

Die Wronski-Matrix an der Stelle 0 wird also

$$\mathrm{W}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \;.$$

Für die gegebenen Anfangswerte lösen wir das Gleichungssystem

$$\mathrm{W}(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

Somit ist $c_1 = -6$, $c_2 = 6$, $c_3 = 1$. Die Lösung für das Anfangswertproblem ist also

$$f(x) = -6 + 6\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-2x} \;.$$

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 5y^{(2)} + 8y^{(1)} - 4y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g_1(x) = \mathrm{e}^x$, $g_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $g_3(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Bestimmen Sie für g_1, g_2, g_3 die Wronskimatrix $\mathrm{W}(1)$.

Überprüfen Sie: g_1, g_2, g_3 bilden ein Fundamentalsystem der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$ und $y''(1) = 5$.

Lösung.

(a) Wir bestimmen zunächst die Ableitungen:

$$\begin{array}{lll}
g_1(x) = \mathrm{e}^x & g_2(x) = \mathrm{e}^{2x} & g_3(x) = x\mathrm{e}^{2x} \\
g_1'(x) = \mathrm{e}^x & g_2'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} & g_3'(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} = (2x+1)\mathrm{e}^{2x} \\
g_1''(x) = \mathrm{e}^x & g_2''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} & g_3''(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2(2x+1)\mathrm{e}^{2x} = (4x+4)\mathrm{e}^{2x} \\
g_1'''(x) = \mathrm{e}^x & g_2'''(x) = 8\mathrm{e}^{2x} & g_3'''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + 2(4x+4)\mathrm{e}^{2x} = (8x+12)\mathrm{e}^{2x}
\end{array}$$

Einsetzen von g_1 in die Differentialgleichung ergibt

$$\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^x + 8\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x = 0 \quad \checkmark$$

Einsetzen von g_2 in die Differentialgleichung ergibt

$$8\mathrm{e}^{2x} - 5 \cdot 4\mathrm{e}^{2x} + 8 \cdot 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{2x} = 0 \quad \checkmark$$

Einsetzen von g_3 in die Differentialgleichung ergibt

$$(8x+12)\mathrm{e}^{2x} - 5(4x+4)\mathrm{e}^{2x} + 8(2x+1)\mathrm{e}^{2x} - 4x\mathrm{e}^{2x} = (8x - 20x + 16x - 4x + 12 - 20 + 8)\mathrm{e}^{2x} = 0 \quad \checkmark$$

Somit sind $g_1(x)$, $g_2(x)$ und $g_3(x)$ Lösungen.

Für $g_3(x)$ kann alternativ auch Heaviside angewandt werden:

Einsetzen von $g_3(x)$ in die Differentialgleichung gibt

$$\begin{aligned}
& g_3^{(3)}(x) - 5g_3^{(2)}(x) + 8g_3^{(1)}(x) - 4g_3(x) \\
= \; & (\mathrm{D}^3 - 5\mathrm{D}^2 + 8\mathrm{D} - 4)(g_3(x)) \\
= \; & p(\mathrm{D})(x\mathrm{e}^{2x}) \\
= \; & \mathrm{e}^{2x} p(\mathrm{D} + 2)(x)
\end{aligned}$$

wobei $p(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Es wird

$$\begin{aligned} p(X+2) &= (X+2)^3 - 5(X+2)^2 + 8(X+2) - 4 \\ &= X^3 + 6X^2 + 12X + 8 - 5X^2 - 20X - 20 + 8X + 16 - 4 \\ &= X^3 + X^2 \,. \end{aligned}$$

Wir können also fortsetzen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} p(\mathrm{D}+2)(x) &= \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^2)(x) \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

(b) Einsetzen von $x = 1$ in die obigen Ableitungen liefert direkt die Wronski-Matrix:

$$\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^2 & 3\mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 4\mathrm{e}^2 & 8\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^2 & 3\mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 4\mathrm{e}^2 & 8\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \\ 0 & 3\mathrm{e}^2 & 7\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \\ 3\mathrm{e}^2 & 7\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e} \cdot (7\mathrm{e}^4 - 6\mathrm{e}^4) = \mathrm{e}^5 \neq 0 \,.$$

Da die Determinante ungleich null ist, bilden g_1, g_2, g_3 ein Fundamentalsystem.

(c) Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind Linearkombinationen des Fundamentalsystems. Somit ist jede Lösungen von der Form

$$c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + c_3 x \mathrm{e}^{2x}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d) Für die gegebenen Anfangswerte lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^2 & 3\mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 4\mathrm{e}^2 & 8\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & 1 \\ \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^2 & 3\mathrm{e}^2 & 2 \\ \mathrm{e} & 4\mathrm{e}^2 & 8\mathrm{e}^2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & 1 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 & 1 \\ 0 & 3\mathrm{e}^2 & 7\mathrm{e}^2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e} & 0 & -\mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & 1 \end{array}\right) .$$

Somit ist $c_1 = \mathrm{e}^{-1}$, $c_2 = -\mathrm{e}^{-2}$ und $c_3 = \mathrm{e}^{-2}$.

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit gegeben durch

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2} x \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{2x-2} + x\mathrm{e}^{2x-2} \,.$$

Hausaufgabe 18 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind. Überprüfen Sie unter Zuhilfenahme der Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$, ob g, h ein Fundamentalsystem bilden.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{W}(1)^{-1}$. Finden Sie damit zwei Lösungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der Differentialgleichung, für welche gilt:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 1 \qquad & f_2(1) &= 0 \\ f_1'(1) &= 0 \qquad & f_2'(1) &= 1. \end{aligned}$$

(d) Finden Sie d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = d_1 f_1(x) + d_2 f_2(x)$ die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(1) = 7$ und $y'(1) = -2$ löst.

Lösung.

(a) Die Ableitungen von $g(x)$ und $h(x)$ sind:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2, \qquad & g'(x) &= 2x, \qquad & g''(x) &= 2, \\ h(x) &= x^3, \qquad & h'(x) &= 3x^2, \qquad & h''(x) &= 6x. \end{aligned}$$

Einsetzen von g in die Differentialgleichung ergibt

$$x^2 \cdot 2 - 4x \cdot 2x + 6x^2 = 2x^2 - 8x^2 + 6x^2 = 0 \quad \checkmark$$

Einsetzen von h in die Differentialgleichung ergibt

$$x^2 \cdot 6x - 4x \cdot 3x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 12x^3 + 6x^3 = 0 \quad \checkmark$$

Beide Funktionen $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ sind damit Lösungen der Differentialgleichung. Die Wronski-Matrix lautet

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} g(x) & h(x) \\ g'(x) & h'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Für $x = 1$ also

$$\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von $\mathrm{W}(1)$ ergibt sich zu

$$\det(\mathrm{W}(1)) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Da die Determinante ungleich null ist, bilden $g(x)$ und $h(x)$ ein Fundamentalsystem.

(b) Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind Linearkombinationen des Fundamentalsystems. Somit ist jede Lösungen von der Form

$$f(x) = c_1 g(x) + c_2 h(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Da $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind setzen wir an:

$$f_1(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 \text{ und } f_2(x) = \tilde{c}_1 x^2 + \tilde{c}_2 x^3 \text{ mit } c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Die Inverse von $\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathrm{W}(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $f_1(x)$ setzen wir die Anfangsbedingungen $f_1(1) = 1$ und $f_1'(1) = 0$ ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathrm{W}(1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$f_1(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

Für $f_2(x)$ setzen wir die Anfangsbedingungen $f_2(1) = 0$ und $f_2'(1) = 1$ ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{W}(1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$f_2(x) = -x^2 + x^3.$$

(d) Gesucht sind $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = d_1 f_1(x) + d_2 f_2(x)$$

die Anfangsbedingungen $f(1) = 7$, $f'(1) = -2$ erfüllt.

Es ist

$$\begin{aligned} 7 &\overset{!}{=} f(1) &&= d_1 f_1(1) + d_2 f_2(1) = d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 0 \\ -2 &\overset{!}{=} f'(1) &&= d_1 f_1'(1) + d_2 f_2'(1) = d_1 \cdot 0 + d_2 \cdot 1 \end{aligned}$$

und also $d_1 = 7$ und $d_2 = -2$.

Nicht verlangt: Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann übrigens gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= 7f_1(x) - 2f_2(x) \\ &= 7(3x^2 - 2x^3) - 2(-x^2 + x^3) \\ &= 21x^2 - 14x^3 + 2x^2 - 2x^3 \\ &= 23x^2 - 16x^3. \end{aligned}$$