Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 7

Hausaufgabe 19 Wir betrachten folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 7y^{(2)} + 15y' - 9y = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie $p(3)$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(c) Überprüfen Sie die Lösungen aus (b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -5$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$p(X) = X^3 - 7X^2 + 15X - 9\,.$$

Wir erhalten

$$p(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 9 = 27 - 63 + 45 - 9 = 0.$$

Folglich ist $\lambda_1 = 3$ eine Nullstelle. Mit Polynomdivision erhalten wir

$$X^3 - 7X^2 + 15X - 9 = (X-3)(X^2 - 4X + 3).$$

Wir berechnen nun die verbleibenden zwei Nullstellen λ_2, λ_3 mittels der Mitternachtsformel

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1$$

und erhalten $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$.

Insgesamt ist also

$$p(X) = (X-3)^2(X-1)\,.$$

(b) Aus den Nullstellen von $p(X)$ und deren Vielfachheit ergibt sich das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^{3x}\,, \\ f_3(x) &= x\mathrm{e}^{3x}\,. \end{aligned}$$

(c) Wir überprüfen die Lösungen durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
f_1^{(3)}(x) - 7f_1^{(2)}(x) + 15f_1'(x) - 9f_1(x) &= \mathrm{e}^x - 7\mathrm{e}^x + 15\mathrm{e}^x - 9\mathrm{e}^x = 0 \quad \checkmark \\
f_2^{(3)}(x) - 7f_2^{(2)}(x) + 15f_2'(x) - 9f_2(x) &= 27\mathrm{e}^{3x} - 7\cdot 9\cdot \mathrm{e}^{3x} + 15\cdot 3\mathrm{e}^{3x} - 9\mathrm{e}^{3x} = 0 \quad \checkmark \\
f_3^{(3)}(x) - 7f_3^{(2)}(x) + 15f_3'(x) - 9f_3(x) &= (\mathrm{D}^3 - 7\mathrm{D}^2 + 15\mathrm{D} - 9)(f_3(x)) \\
&= p(\mathrm{D})(x\mathrm{e}^{3x}) \\
&= \mathrm{e}^{3x}\cdot p(\mathrm{D}+3)(x)
\end{aligned}$$

Für letzteres rechnen wir

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{D}+3) &= (\mathrm{D}+3)^3 - 7(\mathrm{D}+3)^2 + 15(\mathrm{D}+3) - 9 \\
&= \mathrm{D}^3 + 9\mathrm{D}^2 + 27\mathrm{D} + 27 - 7\mathrm{D}^2 - 42\mathrm{D} - 63 + 15\mathrm{D} + 36 \\
&= \mathrm{D}^3 + 2\mathrm{D}^2
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\mathrm{e}^{3x}\cdot p(\mathrm{D}+3)(x) = \mathrm{e}^{3x}\cdot(\mathrm{D}^3 + 2\mathrm{D}^2)(x) = \mathrm{e}^{3x}(0+0) = 0 \quad \checkmark$$

(d) Alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung sind von der Form

$$f(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x} + c_3x\mathrm{e}^{3x}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Die Wronski-Matrix ist

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^x & 3\mathrm{e}^{3x} & (3x+1)\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^x & 9\mathrm{e}^{3x} & (9x+6)\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Matrix an der Stelle 0 wird also

$$\mathrm{W}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die gegebenen Anfangswerte lösen wir das Gleichungssystem

$$\mathrm{W}(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Somit ist $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$.

Die Lösung für das Anfangswertproblem ist also

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{3x}.$$

Hausaufgabe 20 Wir betrachten folgende Differentialgleichung.

$$y'' + y' - 2y \;=\; 27x^2\mathrm{e}^{-2x}$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 27x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 27x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist $p(X) = X^2 + X - 2$. Wir berechnen die Nullstellen λ_1, λ_2 mittels der Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

und erhalten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

Da $p(X)$ Grad 2 hat und zwei verschiedene reelle Nullstellen hat, erhalten wir als Fundamentalsystem daraus

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} = \mathrm{e}^{x} \;, \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} = \mathrm{e}^{-2x} \;. \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite. Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = 27x^2$ ein Polynom von Grad 2 ist und wobei $\mu = -2$ ist.

Da μ eine einfache Nullstelle von $p(X)$ ist, liegt der Resonanzfall vor mit $m = 1$. Wir setzen daher

$$f_\mathrm{p}(x) = x(s_2x^2 + s_1x + s_0)\mathrm{e}^{-2x} = (s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)\mathrm{e}^{-2x}$$

an und bestimmen die Koeffizienten durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung.

Mit Heaviside können wir hier viel Arbeit sparen: Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist.

Es gilt $p(X-2) = (X-2)^2 + (X-2) - 2 = X^2 - 3X$ und daher $p(\mathrm{D}-2) = \mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D}$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
27x^2\mathrm{e}^{-2x} \stackrel{!}{=} f_\mathrm{p}''(x) + f_\mathrm{p}'(x) - 2f_\mathrm{p}(x) &= p(\mathrm{D})(f_\mathrm{p}(x)) \\
&= p(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{-2x}(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x)) \\
&= \mathrm{e}^{-2x} \cdot p(\mathrm{D}-2)(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x) \\
&= \mathrm{e}^{-2x} \cdot (\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D})(s_2x^3 + s_1x^2 + s_0x) \\
&= \mathrm{e}^{-2x}(6s_2x + 2s_1 - 9s_2x^2 - 6s_1x - 3s_0) \\
&= \mathrm{e}^{-2x}(-9s_2x^2 + (6s_2 - 6s_1)x + 2s_1 - 3s_0)\ .
\end{aligned}$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch für

$$-9s_2x^2 + (6s_2 - 6s_1)x + 2s_1 - 3s_0 \ \stackrel{!}{=}\ 27x^2 \ = \ r(x)\ .$$

$$\begin{aligned}
x^2 :& \quad & -9s_2 &= 27 \\
x^1 :& \quad & 6s_2 - 6s_1 &= 0 \\
x^0 :& \quad & 2s_1 - 3s_0 &= 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten $s_2 = -3$, $s_1 = -3$ und $s_0 = -2$.

Somit ist

$$f_\mathrm{p}(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-3x^3 - 3x^2 - 2x)$$

eine partikuläre Lösung wie gesucht.

Alternative Lösung zu (b)*: Variation der Konstanten.*

Mit (a) erhalten wir die Wronski-Matrix

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^x & -2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}(x)^{-1} &= \frac{1}{\mathrm{e}^x \cdot (-2\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-2x}} \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{e}^x}{3} \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_\mathrm{p}(x) = d_1(x)f_1(x) + d_2(x)f_2(x)$. Hierzu wird

$$\begin{pmatrix} d_1'(x) \\ d_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 27x^2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 27x^2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x^2\mathrm{e}^{-3x} \\ -9x^2 \end{pmatrix}\ .$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int 9x^2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x &= [9x^2\cdot(-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x})] - \int 18x\cdot(-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x})\,\mathrm{d}x \\
&= [-3x^2\mathrm{e}^{-3x}] + \int 6x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x \\
&= [-3x^2\mathrm{e}^{-3x}] + [6x\cdot(-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x})] - \int 6\cdot(-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x})\,\mathrm{d}x \\
&= [-3x^2\mathrm{e}^{-3x} - 2x\mathrm{e}^{-3x} - \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}]\ .
\end{aligned}$$

Somit können wir Stammfunktionen $d_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}(-3x^2 - 2x - \frac{2}{3})$ und $d_2(x) = -3x^3$ wählen. Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{e}^{-3x}(-3x^2 - 2x - \tfrac{2}{3})\mathrm{e}^{x} - 3x^3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}(-3x^3 - 3x^2 - 2x - \tfrac{2}{3})\ .$$

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + f_{\mathrm{p}}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x}(-3x^3 - 3x^2 - 2x),$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 21 Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{x+2}{x^2+x}\, y' - \frac{1}{x^2+x}\, y \;=\; 2x+2\,.$$

(a) Überprüfen Sie: Es sind $f_1(x) := \frac{1}{x}$ und $f_2(x) := x+2$ Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung unter Verwendung von (a).

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ der Differentialgleichung $y'' + \frac{x+2}{x^2+x}\, y' - \frac{1}{x^2+x}\, y \;=\; 2x+2$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + \frac{x+2}{x^2+x}\, y' - \frac{1}{x^2+x}\, y \;=\; 2x+2$.

Lösung.

(a) Einsetzen von $f_1(x)$ in die Differentialgleichung liefert

$$\frac{2}{x^3} - \frac{x+2}{x(x+1)}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}\frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} - \frac{x+2+x}{x^3(x+1)} = \frac{2}{x^3} - \frac{2(x+1)}{x^3(x+1)} = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} = 0 \qquad \checkmark$$

Einsetzen von $f_2(x)$ in die Differentialgleichung liefert

$$0 - \frac{x+2}{x(x+1)}1 - \frac{1}{x(x+1)}(x+2) = \frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{x+2}{x(x+1)} = 0 \qquad \checkmark$$

(b) Für f_1, f_2 ist die Wronski-Matrix gegeben durch

$$\mathrm{W}(x) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x+2 \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathrm{W}(1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\mathrm{W}(1)) = 4 \neq 0$ ist, bilden $f_1,\ f_2$ ein Fundamentalsystem.

(c) Wir verwenden Variation der Konstanten und setzen an: $f_\mathrm{p}(x) = c_1(x)\frac{1}{x} + c_2(x)(x+2)$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2x+2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det \mathrm{W}(x) = \frac{1}{x} - (-\frac{1}{x^2}(x+2)) = \frac{2x+2}{x^2}$ und also

$$\mathrm{W}(x)^{-1} = \frac{x^2}{2x+2}\begin{pmatrix} 1 & -x-2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Also wird

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \frac{x^2}{2x+2}\begin{pmatrix} 1 & -x-2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x+2 \end{pmatrix} \\
&= x^2\begin{pmatrix} 1 & -x-2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2(-x-2) \\ x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x^3-2x^2 \\ x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit können wir Stammfunktionen $c_1(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ und $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ wählen. Damit ist

$$f_{\mathrm{p}}(x) = c_1(x)\frac{1}{x} + c_2(x)(x+2) = \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2(x+2) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2$$

eine partikuläre Lösung.

(d) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} + d_1\frac{1}{x} + d_2(x+2),$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.