Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 7

Hausaufgabe 19 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y^{(0)} = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie $p(2)$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 2$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8.$$

Einsetzen von $X = 2$ ergibt $p(2) = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$. Folglich ist $X = 2$ eine Nullstelle.

Um die weiteren Nullstellen zu finden, dividieren wir zuerst die bekannte Nullstelle aus dem charakteristischen Polynom raus:

$$(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) = (X - 2)(X^2 - 4X + 4)$$

Das verbleibende Polynom ist von zweiter Ordnung und die weiteren Nullstellen können mittels der Mitternachtsformel bestimmt werden. Dies liefert die doppelte Nullstelle $X = 2$.

Zusammen mit der ersten Nullstelle hat das charakteristische Polynom somit eine dreifache Nullstelle $X = 2$. Damit können wir das charakteristische Polynom als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X - 2)^3$$

(b) Mit den Nullstellen und deren Vielfachheit kann direkt ein Fundamentalsystem bestimmt werden: e^{2x}, $x\mathrm{e}^{2x}$, $x^2\mathrm{e}^{2x}$.

(c) Für die Lösung machen wir den Ansatz $f(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x} + c_3 x^2\mathrm{e}^{2x}$. Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{2x})' &= 2\mathrm{e}^{2x} & (\mathrm{e}^{2x})'' &= 4\mathrm{e}^{2x}\\
(x\mathrm{e}^{2x})' &= (2x+1)\mathrm{e}^{2x} & (x\mathrm{e}^{2x})'' &= 4(x+1)\mathrm{e}^{2x}\\
(x^2\mathrm{e}^{2x})' &= 2(x^2+x)\mathrm{e}^{2x} & (x^2\mathrm{e}^{2x})'' &= 2(2x^2+4x+1)\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

und den Anfangswerten erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f'(1) \\ f''(1) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Um die Koeffizienten für die Lösung des Anfangswertproblems zu bestimmen muss das Gleichungssystem gelöst werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 2\mathrm{e}^{-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 2\mathrm{e}^{-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\mathrm{e}^{-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2} \\ 0 & 1 & 0 & -2\mathrm{e}^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{e}^{-2} \end{array}\right)$$

Also ist $c_1 = \mathrm{e}^{-2}$, $c_2 = -2\mathrm{e}^{-2}$, $c_1 = \mathrm{e}^{-2}$.

Somit löst

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-2} \cdot \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-2} \cdot x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2} \cdot x^2\mathrm{e}^{2x} \\ &= (1 - 2x + x^2)\mathrm{e}^{2x-2} \end{aligned}$$

das Anfangswertproblem.

Hausaufgabe 20 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Bestimmen Sie $p(1+\mathrm{i})$. Bestimmen Sie $p(1-\mathrm{i})$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(c) Bestimmen sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 4x - 8\ .$$

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4 = 0.$$

Einsetzen von $X = 1 + \mathrm{i}$ ergibt $p(1 + \mathrm{i}) = -4 - 4(-2 + 2\mathrm{i}) + 8(2\mathrm{i}) - 8(1 + \mathrm{i}) + 4 = 0$. Folglich ist $X = 1+\mathrm{i}$ eine Nullstelle. Da die Nullstellen komplex konjugierte Paare bilden ist $p(1 - \mathrm{i}) = 0$ und $X = 1 - \mathrm{i}$ ebenfalls eine Nullstelle.

Um $p(X)$ in Linearfaktoren zu zerlegen brauchen wir alle Nullstellen von $p(X)$. Um die weiteren Nullstellen zu finden, dividieren wir Nullstellen ab. Es ist

$$(X - (1 + \mathrm{i}))(X - (1 - \mathrm{i}))\ =\ X^2 - 2X + 2\ ,$$

und wir können wir direkt durch das Produkt der Linearfaktoren zu den beiden Nullstellen dividieren:

$$(X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)\ .$$

Die Nullstellen von dem verbleibenden Polynom zweiter Ordnung sind $X = 1 + \mathrm{i}$ und $X = 1 - \mathrm{i}$. Die Faktorisierung haben wir bereits berechnet.

Die Nullstellen von $p(X)$ sind somit das komplex konjugierte Paar $X = 1+\mathrm{i}$ und $X = 1-\mathrm{i}$, wobei jede Nullstelle doppelt vorkommt. Damit können wir das charakteristische Polynom als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X - (1 + \mathrm{i}))^2(X - (1 - \mathrm{i}))^2$$

(b) Mit den Nullstellen und deren Vielfachheit kann direkt ein Fundamentalsystem bestimmt werden: $\mathrm{e}^x \sin(x)$, $\mathrm{e}^x \cos(x)$, $x\mathrm{e}^x \sin(x)$, $x\mathrm{e}^x \cos(x)$.

(c) Wir bestimmen zunächst eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite. Die rechte Seite ist $4x - 8 = (4x - 8)\mathrm{e}^{0x}$. Da $p(0) \neq 0$ ist, liegt kein Resonanzfall vor.

Wir machen den Ansatz $f_{\mathrm{p}}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{0x} = ax+b$ und bestimmen die Koeffizienten durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$0+0+0-8a+4(ax+b) = 4ax+(4b-8a) \stackrel{!}{=} 4x-8$$

Somit ist $a=1$, $b=0$ und damit $f_{\mathrm{p}}(x) = x$.

Die Lösungen der Differentialgleichung sind daher

$$x + c_1\mathrm{e}^x\sin(x) + c_2\mathrm{e}^x\cos(x) + c_3x\mathrm{e}^x\sin(x) + c_4x\mathrm{e}^x\cos(x)$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_3 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 21 Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - \tfrac{1}{x}\, y' - \tfrac{1}{x^2}\, y \;=\; \ln(x)$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $g(x) = x^\alpha$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'' - \tfrac{1}{x}\, y' - \tfrac{1}{x^2}\, y = \ln(x) \quad \text{und} \quad y(1) = 0, \;\; y'(1) = 0$$

Lösung.

(a) Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} - \frac{1}{x}\alpha x^{\alpha-1} - \frac{1}{x^2}x^\alpha = (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} - \alpha x^{\alpha-2} - x^{\alpha-2} = (\alpha^2 - 2\alpha - 1)x^{\alpha-2} \overset{!}{=} 0\,.$$

Wir erhalten $\alpha = 1 \pm \sqrt{1^2+1}$, also $\alpha = 1+\sqrt{2}$ oder $\alpha = 1-\sqrt{2}$.

(b) Mit den Lösungen aus (a) setzen wir an: $f_1(x) = x^{1+\sqrt{2}}$, $f_2(x) = x^{1-\sqrt{2}}$.

Die Wronski-Matrix wird

$$\mathrm{W}(x) \;=\; \begin{pmatrix} x^{1+\sqrt{2}} & x^{1-\sqrt{2}} \\ (1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,.$$

Damit ist

$$\mathrm{W}(1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\,.$$

Da $\det \mathrm{W}(1) = -2\sqrt{2} \neq 0$, liegt mit $f_1(x)$, $f_2(x)$ ein Fundamentalsystem vor.

(c) Da die rechte Seite nicht für den Ansatz nach Art der rechten Seite geeignet ist, verwenden wir Variation der Konstanten. Mit dem Ansatz $f_\mathrm{p}(x) = c_1(x)x^{1+\sqrt{2}} + c_1(x)x^{1-\sqrt{2}}$ liefert der Ansatz mit Variation der Konstanten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^{1+\sqrt{2}} & x^{1-\sqrt{2}} \\ (1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix}$$

Die Matrix-Inversen-Formel gibt

$$\mathrm{W}(x)^{-1} \;=\; -\tfrac{1}{2x\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} & -x^{1-\sqrt{2}} \\ -(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & x^{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,.$$

Also wird

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} \;=\; -\tfrac{1}{2x\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} & -x^{1-\sqrt{2}} \\ -(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & x^{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^{-\sqrt{2}}\ln(x) \\ -x^{\sqrt{2}}\ln(x) \end{pmatrix}\,.$$

Die Koeffizienten integrieren wir mittels partieller Integration. Mit

$$\begin{aligned}\int x^a \ln(x) &= \left[\tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ln(x)\right] - \int \tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ln(x)\right] - \tfrac{1}{a+1}\int x^a\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ln(x) - \tfrac{1}{(a+1)^2}x^{a+1}\right]\end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{1-\sqrt{2}}\,x^{1-\sqrt{2}}\ln(x) - \tfrac{1}{(1-\sqrt{2})^2}\,x^{1-\sqrt{2}}\right) \\ c_2(x) &= -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{1+\sqrt{2}}\,x^{1+\sqrt{2}}\ln(x) - \tfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\,x^{1+\sqrt{2}}\right)\ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f_\mathrm{p}(x) &= c_1(x)x^{1+\sqrt{2}} + c_1(x)x^{1-\sqrt{2}} \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{1-\sqrt{2}}\,x^2\ln(x) - \tfrac{1}{(1-\sqrt{2})^2}\,x^2\right) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{1+\sqrt{2}}\,x^2\ln(x) - \tfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\,x^2\right) \\ &= -x^2\ln(x) - 2x^2 \end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung.

(d) Mit dem Fundamentalsystem sind alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$f(x) = -x^2\ln(x) - 2x^2 + a_1x^{1+\sqrt{2}} + a_2x^{1-\sqrt{2}}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Mit den Anfangswerten und der Ableitung

$$f'(x) = -x - 2x\ln(x) - 4x + a_1(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} + a_2(1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}}\ .$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(1) &= a_1 + a_2 - 0 - 2 &&= a_1 + a_2 - 2 &&\overset{!}{=} 0 \\ f'(1) &= (1+\sqrt{2})a_1 + (1-\sqrt{2})a_2 - 1 - 4 &&= (1+\sqrt{2})a_1 + (1-\sqrt{2})a_2 - 5 &&\overset{!}{=} 0\ . \end{aligned}$$

Die Differenz dieser Gleichungen liefert $\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_2 \overset{!}{=} 3$, also $a_1 - a_2 \overset{!}{=} \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Die Summe der nun entstandenen Gleichungen gibt $2a_1 = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Das führt auf $a_1 = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$ und $a_2 = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Somit löst

$$f(x) = -x^2\ln(x) - 2x^2 + (1 + \tfrac{3}{4}\sqrt{2})x^{1+\sqrt{2}} + (1 - \tfrac{3}{4}\sqrt{2})x^{1-\sqrt{2}}$$

das Anfangswertproblem.