Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 8

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$$

(a) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$ unter Verwendung von (a).

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$.

Lösung.

Wir bestimmen zunächst ein Fundementalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' - 2y' = 0$. Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^2 - 2X = X(X-2).$$

mit Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Das zugehörige Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} = 1, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} = \mathrm{e}^{2x}.$$

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$. Die rechte Seite hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = x$ ein Polynom von Grad 1 und $\mu = 1 + \mathrm{i}$ ist.

Da μ keine Nullstelle von $p(X)$ ist, befinden wir uns im Fall ohne Resonanz. Wir setzen daher für eine partikuläre Lösung an:

$$\tilde{f}_\mathrm{p}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}.$$

Gesucht sind $a, b \in \mathbb{R}$, für welche $\tilde{f}_\mathrm{p}(x)$ die Differentialgleichung erfüllt.

Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist.

Es gilt $p(X + (1+\mathrm{i})) = (X + 1 + \mathrm{i})(X + 1 + \mathrm{i} - 2) = X^2 + 2\mathrm{i}X - 2$ und daher $p(\mathrm{D} + 1 + \mathrm{i}) = \mathrm{D}^2 + 2\mathrm{i}\mathrm{D} - 2$.

Mit Heaviside wird also

$$\begin{aligned}
\tilde{f}''_\mathrm{p}(x) - 2\tilde{f}'_\mathrm{p}(x) &= p(D)(\tilde{f}_\mathrm{p}(x)) \\
&= p(D)(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}(ax+b)) \\
&= \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \cdot p(\mathrm{D} + 1 + \mathrm{i})((ax+b)) \\
&= \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \cdot p(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{i}\mathrm{D} - 2)(ax+b) \\
&= \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \cdot (2\mathrm{i}a - 2ax - 2b) \\
&\overset{!}{=} x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{\mathrm{i}}{2}$.

Somit ist $\tilde{f}_{\mathrm{p}}(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

(b) Wir betrachten nun die Differentialgleichung $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$.

Es ist $\mathrm{Im}\big(x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\big) = \mathrm{Im}\big(x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) = \mathrm{Im}(x\mathrm{e}^x(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))) = x\sin(x)\mathrm{e}^x$.

Daher ist der Imaginärteil einer partikulären Lösung von $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$.

Unter Verwendung von (a) ist eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$ also gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{p}}(x) &= \mathrm{Im}\left(\left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(-\tfrac{1}{2}x\cos(x)\mathrm{e}^x - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^x\cos(x) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}x\sin(x)\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\sin(x)\mathrm{e}^x\right)\\
&= -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos(x) + x\sin(x)) \ .
\end{aligned}$$

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$ ist von der Form

$$f(x) \ = \ f_{\mathrm{p}}(x) + c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) \ = \ -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos(x) + x\sin(x)) + c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x} \ ,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten und inversen Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}(\frac{1}{2}(t+2)^2 \mathrm{e}^t)$

(b) $\mathcal{L}(\sin(t)\cos(2t))$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s-2}{s^2-4s+20}\right)$

Lösung.

(a) Es ist

$$\mathcal{L}(\tfrac{1}{2}(t+2)^2) \;=\; \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}t^2+2t+2) \;=\; \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(t^2)+2\mathcal{L}(t)+2\mathcal{L}(1) \;=\; \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{s^3}+2\tfrac{1}{s^2}+2\tfrac{1}{s} \;=\; \tfrac{1}{s^3}+\tfrac{2}{s^2}+\tfrac{2}{s}\ ,$$

mit der Dämpfungsregel also

$$\mathcal{L}(\tfrac{1}{2}(t+2)^2\mathrm{e}^t) \;=\; \tfrac{1}{(s-1)^3}+\tfrac{2}{(s-1)^2}+\tfrac{2}{s-1}\ .$$

(b) Mit Euler-de Moivre wird

$$\begin{aligned}
\sin(t)\cos(2t) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}) \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(3t)-2\mathrm{i}\sin(t)) \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(3t)-\sin(t))\ .
\end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin(t)\cos(2t)) &= \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}(\sin(3t)-\sin(t))) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}(\sin(3t))-\mathcal{L}(\sin(t))) \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{s^2+9}-\tfrac{1}{s^2+1})\ .
\end{aligned}$$

(c) Zuerst führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Wir bestimmen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

gilt. Wir erhalten die Bedingung

$$\begin{aligned}
(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+9) &= s \\
As^3+As+Bs^2+B+Cs^3+9Cs+Ds^2+9D &= s
\end{aligned}$$

und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Wir vergleichen die Terme desselben Grads.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} s^3: & A+C & = & 0 \\ s^2: & B+D & = & 0 \\ s: & A+9C & = & 1 \\ 1: & B+9D & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} C & = & -A \\ D & = & -B \\ A+9C & = & 1 \\ B+9D & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} C & = & -A \\ D & = & -B \\ A-9A & = & 1 \\ B-9B & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} C & = & \frac{1}{8} \\ D & = & 0 \\ A & = & -\frac{1}{8} \\ B & = & 0 \end{array}\right.$$

Also ist

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+1)} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{8}\cdot\frac{s}{s^2+1} \ .$$

Für die inverse Laplace-Transformierte erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)(s^2+1)}\right) &= -\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\cos(3t) + \frac{1}{8}\cos(t) \ . \end{aligned}$$

(d) Quadratische Ergänzung im Nenner und nachfolgende Umformung des Zählers gibt

$$\frac{3s-2}{s^2-4s+20} = \frac{3s-2}{(s-2)^2+16} = 3\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+16} + \frac{4}{(s-2)^2+16} \ .$$

Unter Berücksichtigung der Dämpfungsregel wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(3\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+16} + \frac{4}{(s-2)^2+16}\right) &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s-2)^2+16}\right) \\ &= 3\mathrm{e}^{2t}\cos(4t) + \mathrm{e}^{2t}\sin(4t) \ . \end{aligned}$$

Hausaufgabe 24 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y \;=\; t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.
Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Lösung.

(a) Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f''(t) + f(t) \;=\; t\;.$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 1$ und $f'(0) = 5$.

Es ist $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$. Wir wenden die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an. Es wird

$$\mathcal{L}(f''(t)) + \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t)$$

und also

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + F(s) = \frac{1}{s^2}\;.$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$s^2F(s) - s - 5 + F(s) = \frac{1}{s^2}\;.$$

(b) Nun bestimmen wir $F(s)$. Es ist

$$\begin{aligned} F(s)(s^2+1) &= \frac{1}{s^2} + s + 5 \\ F(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{s^2+1}\;. \end{aligned}$$

Um die inverse Laplace-Transformation berechnen zu können, benötigen wir eine Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Wir bestimmen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

gilt. Wir erhalten die Bedingung

$$As(s^2+1)+B(s^2+1)+(Cs+D)s^2 = As^3+As+Bs^2+B+Cs^3+Ds^2 = 1$$

und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Wir vergleichen die Terme desselben Grads.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} s^3: & A+C & = & 0 \\ s^2: & B+D & = & 0 \\ s: & A & = & 0 \\ 1: & B & = & 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} C & = & 0 \\ D & = & -1 \\ A & = & 0 \\ B & = & 1 \end{array}\right.$$

Es wird also

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \ .$$

Somit ergibt sich

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1} \ .$$

(c) Abschließend bestimmen wir $f(t)$, indem wir die inverse Laplace-Transformation anwenden. Es wird

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} + 4\cdot\frac{1}{s^2+1}\right) \\ f(t) &= t + \cos(t) + 4\sin(t) \ . \end{aligned}$$