

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 8

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$(*) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ und ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie partikuläre Lösungen von $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$ und von $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{ix}$.
- (c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $(*)$ unter Verwendung von (b). Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen von $(*)$.

Lösung.

- (a) Die zu $(*)$ gehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(X) = X^2 + 2X + 2 = (X + 1)^2 + 1 = (X + 1 - i)(X + 1 + i).$$

Das Polynom hat die echt komplexen Nullstellen $-1 + i$ und $-1 - i$. Also erhalten wir das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{-x} \cos(x), \quad f_2(x) = e^{-x} \sin(x).$$

- (b) *Erstens.* Wir beginnen zunächst mit der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$e^{(-1+i)x} =: r(x)e^{\mu x}$$

mit $r(x) = 1$ und $\mu = -1 + i$.

Wir haben $d = 0$, da $r(x) = 1$ ein Polynom von Grad 0 ist.

Zudem stellen wir fest, dass $\mu = -1 + i$ eine einfache Nullstelle von $p(x)$ ist. Also befinden wir uns im Resonanzfall mit $m = 1$, und die gesuchte partikuläre Lösung hat die Form $f_p(x) = s(x) \cdot x^1 \cdot e^{\mu x}$, wobei $s(x)$ ein Polynom von Grad 0 ist.

Mit anderen Worten, die gesuchte partikuläre Lösung hat die Form $f_p(x) = Cx \cdot e^{\mu x}$ für ein $C \in \mathbb{C}$.

Es ist

$$\begin{aligned} p(X + \mu) &= (X - 1 + i)^2 + 2(X - 1 + i) + 2 \\ &= X^2 - 2X + 2iX + 1 - 2i - 1 + 2X - 2 + 2i + 2 \\ &= X^2 + 2iX. \end{aligned}$$

Also muß

$$p(D + \mu)(Cx) = (D^2 + 2iD)(Cx) = 2iC \stackrel{!}{=} 1 = r(x)$$

sein. Wir erhalten $C = -\frac{1}{2}i$.

Demnach ist eine partikuläre Lösung zu $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$ gegeben durch

$$\tilde{f}_{p,1}(x) = -\frac{i}{2}xe^{(-1+i)x}.$$

Zweitens. Nun betrachten wir die zweite Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = x^2e^{ix}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$x^2e^{ix} =: q(x)e^{\lambda x}$$

mit $r(x) = x^2$ und $\mu = i$.

Wir haben $d = 2$, da $r(x) = x^2$ ein Polynom von Grad 2 ist.

Es hat $p(X)$ nur die Nullstellen $-1 + i$ und $-1 - i$. Also ist $p(i) \neq 0$. Somit liegt nicht der Resonanzfall vor.

Unsere partikuläre Lösung hat also die Form

$$g_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\lambda x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Es ist $p(X + \mu) = p(X + i) = (X + i)^2 + 2(X + i) + 2 = X^2 + (2 + 2i)X + 1 + 2i$.

Somit sollte sein:

$$\begin{aligned} &p(D + i)(ax^2 + bx + c) \\ &= (D^2 + (2 + 2i)D + 1 + 2i)(ax^2 + bx + c) \\ &= (ax^2 + bx + c)'' + (2 + 2i) \cdot (ax^2 + bx + c)' + (1 + 2i)(ax^2 + bx + c) \\ &= 2a + (2 + 2i)(2ax + b) + (1 + 2i) \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= (1 + 2i)ax^2 + ((4 + 4i)a + (1 + 2i)b)x + (2a + (2 + 2i)b + (1 + 2i)c) \\ &\stackrel{!}{=} x^2 = r(x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= (2i + 1)a \\ 0 &= (4 + 4i)a + (1 + 2i)b \\ 0 &= 2a + (2 + 2i)b + (1 + 2i)c. \end{aligned}$$

Die Lösung wird

$$a = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5},$$

$$b = -\frac{4+4i}{1+2i}a = -\frac{(4+4i)(1-2i)}{5} \cdot \frac{1-2i}{5} = \frac{4(7i-1)}{25}$$

und

$$c = -\frac{2}{1+2i}a - \frac{2+2i}{1+2i}b = -\frac{2(1-2i)}{5} \cdot \frac{1-2i}{5} - \frac{(2+2i)(1-2i)}{5} \cdot \frac{4(7i-1)}{25} = \frac{-2-136i}{125}.$$

Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$\tilde{f}_{p,2}(x) = \left(\frac{1-2i}{5}x^2 + \frac{4(7i-1)}{25}x - \frac{2+136i}{125} \right) e^{ix}$$

(c) Wir betrachten die rechten Seiten der Differentialgleichungen aus (b).

Wir haben

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix} = e^{-x}(\cos(x) + i \sin(x)) = e^{-x} \cos(x) + ie^{-x} \sin(x).$$

Also ist

$$\operatorname{Im}(e^{(-1+i)x}) = e^{-x} \sin(x).$$

Wir haben

$$x^2 e^{ix} = x^2 (\cos(x) + i \sin(x)) = x^2 \cos(x) + ix^2 \sin(x).$$

Also ist

$$\operatorname{Re}(x^2 e^{ix}) = x^2 \cos(x).$$

Wir stellen zudem fest, dass die rechte Seite von (*) sich schreiben lässt als

$$e^{-x} \sin(x) + x^2 \cos(x) = \operatorname{Im}(e^{(-1+i)x}) + \operatorname{Re}(x^2 e^{ix}).$$

Somit ist eine partikuläre Lösung von (*) gegeben durch

$$f_p(x) = \operatorname{Im}(\tilde{f}_{p,1}(x)) + \operatorname{Re}(\tilde{f}_{p,2}(x)),$$

wobei $\tilde{f}_{p,1}(x)$ und $\tilde{f}_{p,2}(x)$ die partikulären Lösungen aus (b) sind.

Wir berechnen $\operatorname{Im}(\tilde{f}_{p,1}(x))$. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p,1}(x) &= -\frac{i}{2} \cdot x \cdot e^{(-1+i)x} \\ &= \frac{1}{2} x e^{-x} \sin(x) - \frac{i}{2} x e^{-x} \cos(x). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\operatorname{Im}(\tilde{f}_{p,1}(x)) = -\frac{1}{2} x e^{-x} \cos(x).$$

Wir berechnen $\operatorname{Re}(\tilde{f}_{p,2}(x))$. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p,2}(x) &= \left(\frac{1-2i}{5}x^2 + \frac{4(7i-1)}{25}x - \frac{2+136i}{125} \right) e^{ix} \\ &= \left(\frac{1-2i}{5}x^2 + \frac{4(7i-1)}{25}x - \frac{2+136i}{125} \right) (\cos(x) + i \sin(x)) \\ &= \left(\frac{x^2}{5}(2 \sin(x) + \cos(x)) - \frac{x}{25}(28 \sin(x) + 4 \cos(x)) + \frac{1}{125}(136 \sin(x) - 2 \cos(x)) \right) \\ &\quad + i \left(\frac{x^2}{5}(\sin(x) - 2 \cos(x)) + \frac{4x}{25}(7 \cos(x) - \sin(x)) - \frac{1}{125}(136 \cos(x) + 2 \sin(x)) \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\operatorname{Re}\left(\tilde{f}_{p,2}(x)\right) = \frac{x^2}{5}(2 \sin(x) + \cos(x)) - \frac{x}{25}(28 \sin(x) + 4 \cos(x)) + \frac{1}{125}(136 \sin(x) - 2 \cos(x)).$$

Also ist insgesamt

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \operatorname{Im}(f_p(x)) + \operatorname{Re}(g_p(x)) \\ &= -\frac{1}{2}x e^{-x} \cos(x) \\ &\quad + \frac{x^2}{5}(2 \sin(x) + \cos(x)) - \frac{x}{25}(28 \sin(x) + 4 \cos(x)) + \frac{1}{125}(136 \sin(x) - 2 \cos(x)). \end{aligned}$$

Aus (a) kennen wir das Fundamentalsystem f_1, f_2 von der zu (*) gehörigen homogenen Differentialgleichung.

Damit ist die Menge aller Lösungen von (*) gegeben durch

$$\begin{aligned} &\{ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + f_p(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} \\ = &\{ c_1 e^{-x} \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{2}x e^{-x} \cos(x) \\ &\quad + \frac{x^2}{5}(2 \sin(x) + \cos(x)) - \frac{x}{25}(28 \sin(x) + 4 \cos(x)) + \frac{1}{125}(136 \sin(x) - 2 \cos(x)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

- (a) $\mathcal{L}((3t + 1)^2 e^{2t})$
 (b) $\mathcal{L}(e^t \cosh(t) \cos(t))$
 (c) $\mathcal{L}(f(t))$, wobei $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \end{cases}$ und wobei $s > 0$.
 (d) $\mathcal{L}(t^2 \cos(t - \frac{\pi}{4}))$

Lösung.

- (a) Wir verwenden die Transformationsregel $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ und die Linearität der Laplace-Transformation. Damit wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((3t + 1)^2 e^{2t}) &= \mathcal{L}((1 + 6t + 9t^2)e^{2t}) \\ &= \mathcal{L}(e^{2t}) + 6\mathcal{L}(te^{2t}) + 9\mathcal{L}(t^2 e^{2t}) \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{6}{(s-2)^2} + \frac{18}{(s-2)^3}. \end{aligned}$$

- (b) Es ist

$$e^t \cosh(t) \cos(t) = e^t \cdot \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \cos(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) \cos(t).$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, die Dämpfungsregel $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$ und die Linearität der Laplace-Transformation.

Es wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^t \cosh(t) \cos(t)) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(e^{2t} + 1) \cos(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{2t} \cos(t)) + \mathcal{L}(\cos(t))) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

- (c) Wir berechnen $\mathcal{L}(f(t))$ direkt über die Definition der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Wir zerlegen den Definitionsbereich $[0, +\infty) = [0, 1] \cup (1, +\infty)$ und nutzen die Additivität des Integrals aus. Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^1 f(t) e^{-st} dt + \int_1^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \underbrace{\int_0^1 0 e^{-st} dt}_{=0} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-st} dt}_{=: I}.$$

Für $s > 0$ wird

$$I = \int_1^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-s\beta}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} \right) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Insgesamt haben wir

$$\mathcal{L}(f(t)) = 0 + I = \frac{e^{-s}}{s}$$

für $s > 0$.

(d) Es ist

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(t) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin(t) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) + \sin(t)) .$$

Wir verwenden

$$\mathcal{L}(t^2 f(t)) = F''(s)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(t)) &= \frac{s}{s^2+1} \\ \mathcal{L}(\sin(t)) &= \frac{1}{s^2+1} . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2 \cos(t - \frac{\pi}{4})) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{L}(t^2 \cos(t)) + \mathcal{L}(t^2 \sin(t))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d^2}{ds^2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{ds} \frac{1 \cdot (s^2+1) - s \cdot 2s}{(s^2+1)^2} + \frac{d}{ds} \frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{ds} \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} - \frac{d}{ds} \frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-2s) \cdot (s^2+1)^2 - (1-s^2) \cdot 2(s^2+1) \cdot 2s}{(s^2+1)^4} - \frac{2 \cdot (s^2+1)^2 - 2s \cdot 2(s^2+1) \cdot 2s}{(s^2+1)^4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-2s) \cdot (s^2+1) - (1-s^2) \cdot 2 \cdot 2s}{(s^2+1)^3} - \frac{2 \cdot (s^2+1) - 2s \cdot 2 \cdot 2s}{(s^2+1)^3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2s^3 - 2s - 4s + 4s^3}{(s^2+1)^3} - \frac{2s^2 + 2 - 8s^2}{(s^2+1)^3}\right) \\ &= \frac{2s^3 + 6s^2 - 6s - 2}{\sqrt{2}(s^2+1)^3} \\ &= \frac{\sqrt{2}(s^3 + 3s^2 - 3s - 1)}{(s^2+1)^3} . \end{aligned}$$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 24

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = e^t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

- Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie \mathcal{L} auf beide Seiten der entstehenden Gleichung an.
- Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstehenden Ausdruck an.
- Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Lösung.

- Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^t.$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$.

Laplace-Transformation auf beiden Seiten liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) - 3sF(s) + 3f(0) + 2F(s) &= \mathcal{L}(e^t) \\ &= \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

wegen der Anfangsbedingungen also

$$s^2 F(s) - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s-1} + s - 2.$$

- Wir bestimmen $F(s)$:

$$\begin{aligned} s^2 F(s) - 3sF(s) + 2F(s) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s)(s^2 - 3s + 2) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s)(s-1)(s-2) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Der zweite Bruch liegt bereits in einer für die inverse Laplace-Transformation geeigneten Form vor. Auf den ersten Bruch wenden wir Partialbruchzerlegung an.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2} \\ &= \frac{A(s-1)(s-2) + B(s-2) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)} \\ &= \frac{As^2 - 3As + 2A + Bs - 2B + Cs^2 - 2Cs + C}{(s-1)^2(s-2)}, \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -3A + B - 2C &= 0 \\ 2A - 2B + C &= 1 \end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Also ist $A = -1$, $B = -1$ und $C = 1$.

Damit wird

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-1}{(s-1)} + \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)} \\ &= -\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-2)}. \end{aligned}$$

(c) Wir können nun $f(t)$ über die inverse Laplace-Transformation bestimmen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) \\ &= -e^t t + e^{2t}. \end{aligned}$$