Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 9

Hausaufgabe 25 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 10y \;=\; 6\mathrm{e}^{-2t}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung dieses Anfangswertproblems.
Wir schreiben $g(t) := 6\mathrm{e}^{-2t}$. Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + 6y' + 10y = 0$.

(a) Bestimmen Sie $U(s) = \frac{1}{p(s)}$ und $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.

(b) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * g(t)$.

(c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingungen.

Lösung.

(a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Differentialgleichung und ergänzen es quadratisch.

$$p(X) \;=\; X^2 + 6X + 10 \;=\; (X+3)^2 + 1$$

Mit

$$U(s) \;=\; \frac{1}{p(s)} \;=\; \frac{1}{s^2 + 6s + 10} \;=\; \frac{1}{(s+3)^2 + 1}$$

wird

$$u(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-(-3))^2 + 1^2}\right) \;=\; \mathrm{e}^{-3t}\sin(t)\ .$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} f(t) &= (u * g)(t) \\ &= (g * u)(t) \\ &= \textstyle\int_0^t 6\mathrm{e}^{-2(t-x)} \cdot \mathrm{e}^{-3x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 6\mathrm{e}^{-2t} \textstyle\int_0^t \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \textstyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-\mathrm{e}^{-x}\sin(x)] - \textstyle\int (-\mathrm{e}^{-x})\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\mathrm{e}^{-x}\sin(x)] + \textstyle\int \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\mathrm{e}^{-x}\sin(x)] + [-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)] - \textstyle\int (-\mathrm{e}^{-x})(-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= [-\mathrm{e}^{-x}\sin(x)] + [-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)] - \textstyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und daher

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\right]\ .$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= 6\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 6\mathrm{e}^{-2t}\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\right]_0^t \\ &= -3\mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{e}^{-t}(\sin(t)+\cos(t))-1) \\ &= \mathrm{e}^{-3t}(-3\sin(t)-3\cos(t))+3\mathrm{e}^{-2t}\ . \end{aligned}$$

(c) Wir machen nun eine Probe.

Es ist $p(X) = (X+3)^2+1$ und also $p(X-3) = X^2+1$.

Mit Heaviside wird

$$\begin{aligned} & f''(t)+6f'(t)+10f(t) \\ = \;& p(\mathrm{D})(f(t)) \\ = \;& p(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{-3t}(-3\sin(t)-3\cos(t))+3\mathrm{e}^{-2t}) \\ = \;& p(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{-3t}(-3\sin(t)-3\cos(t)))+p(\mathrm{D})(3\mathrm{e}^{-2t}) \\ = \;& \mathrm{e}^{-3t}\cdot p(\mathrm{D}-3)(-3\sin(t)-3\cos(t))+3\cdot p(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{-2t}) \\ = \;& \mathrm{e}^{-3t}(\mathrm{D}^2+1)(-3\sin(t)-3\cos(t))+3(\mathrm{D}^2+6\mathrm{D}+10)(\mathrm{e}^{-2t}) \\ = \;& \mathrm{e}^{-3t}((3\sin(t)+3\cos(t))+(-3\sin(t)-3\cos(t)))+3(4\mathrm{e}^{-2t}+6\cdot(-2)\mathrm{e}^{-2t}+10\mathrm{e}^{-2t}) \\ = \;& 0+3\cdot 2\mathrm{e}^{-2t} \;=\; 6\mathrm{e}^{-2t}\ . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$f(0) \;=\; \mathrm{e}^{-3\cdot 0}(-3\sin(0)-3\cos(0))+3\mathrm{e}^{-2\cdot 0} \;=\; -3+3 \;=\; 0\ .$$

Schließlich ist

$$f'(t) \;=\; -3\mathrm{e}^{-3t}(-3\sin(t)-3\cos(t))+\mathrm{e}^{-3t}(-3\cos(t)+3\sin(t))-6\mathrm{e}^{-2t}$$

und damit

$$f'(0) \;=\; \mathrm{e}^{-3\cdot 0}\,(6\cos(0)+12\sin(0))-6\mathrm{e}^{-2\cdot 0} \;=\; 6-6 \;=\; 0\ .$$

Hausaufgabe 26 Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $b(x) := \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$.
Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; Ay + b(x)\ .$$

(a) Sei $w := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie Aw. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + b(x)$.

Lösung.

(a) Es ist

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot w\ .$$

Somit ist w ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Wir bestimmen die weiteren Eigenwerte von A. Es ist

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\ .$$

Wir erhalten also die weiteren Eigenwerte $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ bestimmen wir einen Eigenvektor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich der Eigenvektor $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $Aw_3 = w_3$. Also ist w_3 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$.

Da wir 3 verschiedene reelle Eigenwerte für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vorliegen haben, ist ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ somit gegeben durch

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad f_{[3]}(x) = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

(b) Um alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + b(x)$ zu erhalten, bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung f_{p}.

Die zugehörige Wronski-Matrix lautet

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 2\mathrm{e}^{3x} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}\ .$$

Wir wollen $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$ mittels $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} = \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$ berechnen. Zunächst berechnen wir $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Es ist also $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Nun folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} &= \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 2\mathrm{e}^{-3x} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir setzen an:

$$c'(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} b(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^{-x} \\ -2+x\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Wir leiten auf zu $c_1(x) = 0$ und zu $c_2(x) = -2\mathrm{e}^{-x}$.

Ferner ist

$$[c_3(x)] = \int -2 + x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-2x] + [x(-\mathrm{e}^{-x})] - \int 1 \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = [-2x - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}].$$

Wir wählen $c_3(x) = -2x - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$.

Damit wird

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\mathrm{e}^{-x} \\ -2x-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Als partikuläre Lösung von $y' = Ay + b(x)$ erhalten wir

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)c(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 2\mathrm{e}^{3x} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\mathrm{e}^{-x} \\ -2x-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ -2\mathrm{e}^{x}-2x\mathrm{e}^{x}-x-1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des Differentialgleichungssystems sind somit gegeben durch:

$$f(x) = d_1\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_3\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ 2\mathrm{e}^{x}+2x\mathrm{e}^{x}+x+1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

Es ist auch $2\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ 2\mathrm{e}^{x}+2x\mathrm{e}^{x}+x+1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ 2x\mathrm{e}^{x}+x+1 \end{pmatrix}$ eine partikuläre Lösung. Alle Lösungen des Differentialgleichungssystems sind somit auch gegeben durch:

$$f(x) = d_1\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_3\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x} \\ 0 \\ 2x\mathrm{e}^{x}+x+1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

Hausaufgabe 27 Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Av_1 = -2v_1$. Also ist v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$.

Es ist

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}_3) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)((1-\lambda)^2 + 4) \; .$$

Wir benötigen noch die Nullstellen von $(1-\lambda)^2 + 4$. Es ist

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \\ \iff \quad & (\lambda - 1)^2 = -4 \\ \iff \quad & \lambda - 1 = \pm 2\mathrm{i} \\ \iff \quad & \lambda = 1 \pm 2\mathrm{i} \; . \end{aligned}$$

Das liefert die weiteren Eigenwerte $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = 1 - 2\mathrm{i}$.
Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ bestimmen wir einen Eigenvektor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2-(1+2\mathrm{i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1+2\mathrm{i}) & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-(1+2\mathrm{i}) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit erhalten wir als Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Wir erhalten somit die Lösungen:

$$\begin{aligned} f_{[1]}(x) &= \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_{[2]}(x) &= \mathrm{e}^{x} \left(\cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \;=\; \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \\ f_{[3]}(x) &= \mathrm{e}^{x} \left(\sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \;=\; \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{x}\sin(2x) & \mathrm{e}^{x}\cos(2x) \\ 0 & \mathrm{e}^{x}\cos(2x) & \mathrm{e}^{x}\sin(2x) \end{pmatrix} \; .$$

und

$$\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \; .$$

Somit bilden die Lösungen $f_{[1]}$, $f_{[2]}$, $f_{[3]}$ ein Fundamentalsystem.

(b) Alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ sind von der Form

$$f(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \ .$$

Somit sind $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ und $c_3 = 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist folglich

$$f(x) \ = \ \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + 2\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \ .$$

Man kann das auch schreiben als

$$f(x) \ = \ \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x} \cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x} \sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$