Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 10

Hausaufgabe 28 Sei $A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(a) Es ist 6 ein Eigenwert von A. Sei $B := A - 6\mathrm{E}_4$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Man bestimme das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = 0$.

(b) Es ist 4 ein weiterer Eigenwert von A. Bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.

(c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay$.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Es ist

$$B = A - 6\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Bv &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ B^2 v = B(Bv) &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B^3 v = B(B^2 v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Also ist $k = 3$.

(b) Wir suchen einen Vektor w so, dass $(A - 4\mathrm{E}_4)w = 0$ ist. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ist $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4.

(c) Aus (a) erhalten wir die folgenden linear unabhängigen Lösungen.

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{6\cdot x}\left(\tfrac{x^0}{0!}B^{3-1}v\right) = \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{6\cdot x}\left(\tfrac{x^1}{1!}B^{3-1}v + \tfrac{x^0}{0!}B^{3-2}v\right) = \mathrm{e}^{6x}\left(x\begin{pmatrix}-4\\4\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-4x\\4x+2\\4x\\2\end{pmatrix}$$

$$f_{[3]}(x) = \mathrm{e}^{6\cdot x}\left(\tfrac{x^2}{2!}B^{3-1}v + \tfrac{x^1}{1!}B^{3-2}v + \tfrac{x^0}{0!}B^{3-3}v\right) = \mathrm{e}^{6x}\left(\tfrac{x^2}{2}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-2x^2+1\\2x^2+2x\\2x^2\\2x+1\end{pmatrix}$$

Aus (b) erhalten wir die Lösung

$$f_{[4]}(x) = \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad .$$

Hierfür stellen wir die Wronski-Matrix auf

$$\begin{pmatrix}-4\mathrm{e}^{6x} & -4x\mathrm{e}^{6x} & (-2x^2+1)\mathrm{e}^{6x} & \mathrm{e}^{4x}\\ 4\mathrm{e}^{6x} & (4x+2)\mathrm{e}^{6x} & (2x^2+2x)\mathrm{e}^{6x} & \mathrm{e}^{4x}\\ 4\mathrm{e}^{6x} & 4x\mathrm{e}^{6x} & 2x^2\mathrm{e}^{6x} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{6x} & (2x+1)\mathrm{e}^{6x} & 0\end{pmatrix} .$$

Die Determinante von $\mathrm{W}_{\text{sys}}(0)$ berechnen wir mittels Entwicklung nach der dritten Zeile. Es wird

$$\det \mathrm{W}_{\text{sys}}(0) = \det\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 4\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = 4(0+2+2-0-0-0) = 16 \neq 0\,.$$

Da der Lösungraum des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ Dimension 4 hat, bilden die linear unabhängigen Lösungen $f_{[1]}, f_{[2]}, f_{[3]}, f_{[4]}$ ein Fundamentalsystem.

Alle Lösungen von $y' = Ay$ sind von der Form

$$f(x) = c_1\cdot\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\\0\end{pmatrix} + c_2\cdot\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-4x\\4x+2\\4x\\2\end{pmatrix} + c_3\cdot\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}-2x^2+1\\2x^2+2x\\2x^2\\2x+1\end{pmatrix} + c_4\cdot\mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ,$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

(d) Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \mathrm{W}_{\text{sys}}(0)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} \quad .$$

Es ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-4 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) .$$

Somit erhalten wir $c_4 = -1$, $c_3 = 1$, $c_2 = 0$ und $c_1 = 0$.

Folglich ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \mathrm{e}^{6x} \begin{pmatrix} -2x^2+1 \\ 2x^2+2x \\ 2x^2 \\ 2x+1 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hausaufgabe 29 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = 1 + x^2.$$

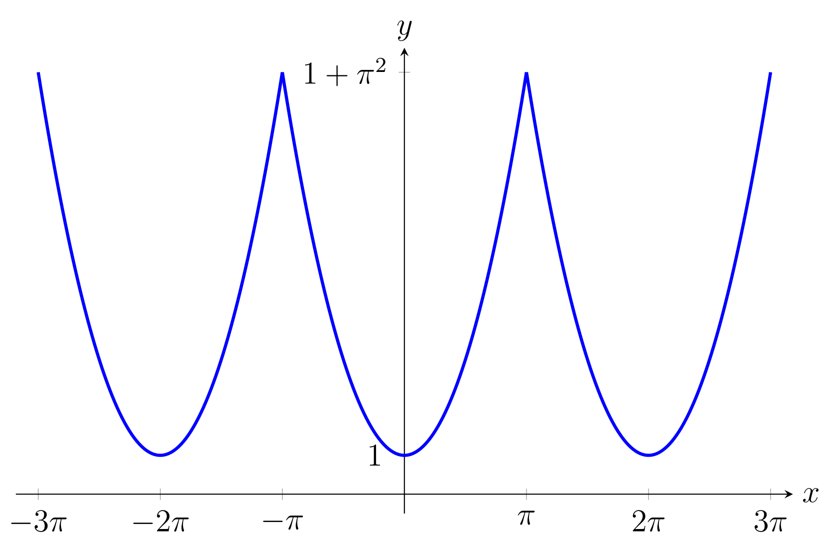
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_f(x)$.

(c) Verwenden Sie $\text{Fourier}_f(0)$, um $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ zu berechnen.

Lösung.

(a) Skizze:



(b) Da die Funktion gerade ist, ist $b_k = 0$ für $k \geqslant 1$. Wir berechnen

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\pi + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} \right) = 2 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \pi^3 = 2 + \frac{2}{3} \pi^2 \ .$$

Für $j \geqslant 1$ ist

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+x^2)\cos(jx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(jx)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(jx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{j}\sin(jx)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{1}{j}\sin(jx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{1}{j}\sin(jx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 0 + \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{2}{j}\int_0^\pi x\sin(jx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{4}{j\pi}\left(\left[-x\frac{1}{j}\cos(jx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{j}\cos(jx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{4}{j\pi}\left(-\frac{\pi}{j}(-1)^j + 0 + \frac{1}{j}\left[\frac{1}{j}\sin(jx)\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{4}{j^2}(-1)^j\ .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^\infty a_j\cos(jx) = 1 + \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^\infty \frac{4}{j^2}(-1)^j\cos(jx)\ .$$

(c) Es ist

$$\mathrm{Fourier}_f(0) = 1 + \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^\infty \frac{4}{j^2}(-1)^j\cos(0) = 1 + \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j^2}\ .$$

Da f in $x = 0$ stetig ist, nutzen wir die Gleichheit $\mathrm{Fourier}_f(0) = f(0) = 1$ und stellen die Gleichung um. Es ist

$$1 = 1 + \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j^2}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j^2} = -\frac{1}{12}\pi^2\ .$$

Hausaufgabe 30 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ definiert ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ x & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi < x \leqslant 3\pi$.

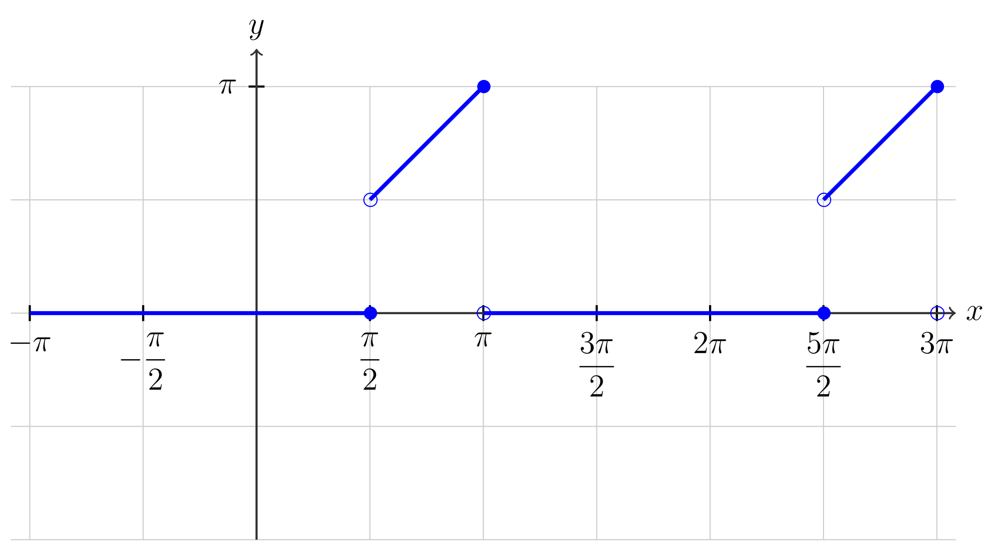
(b) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(d) Sei $f_2(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{2} b_k \sin(kx)$ das zweite Fourier-Polynom von f. Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle f_2(x) | f_2(x) \rangle$.

Lösung.

(a) Skizze:



(b) An der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist der Wert $\text{Fourier}_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Fourier-Reihe gegeben durch

$$\text{Fourier}_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) + \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

(c) Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade.

Es wird

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 0\ \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi \\
&= \frac{3}{8}\pi\ .
\end{aligned}
$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$
\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\left(\left[x\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\tfrac{1}{n}\sin(nx)\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \tfrac{1}{n\pi}\left(\pi\sin\left(n\pi\right) - \tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{n\pi}\left[-\tfrac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -\tfrac{1}{2n}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{n^2\pi}\left(\cos\left(n\pi\right) - \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\tfrac{1}{2n}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right)\ .
\end{aligned}
$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$
\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\left(\left[x\left(-\tfrac{1}{n}\cos(nx)\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\tfrac{1}{n}\cos(nx)\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \tfrac{1}{n\pi}\left(-\pi\cos\left(n\pi\right) + \tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) + \tfrac{1}{n\pi}\left[\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{n}\left(-(-1)^n + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) + \tfrac{1}{n^2\pi}\left(\sin\left(n\pi\right) - \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{n}\left((-1)^{n+1} + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{n^2\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Fourier}_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\ &= \frac{3}{16}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)\cos(nx) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin(nx)\ .\end{aligned}$$

Dies lässt sich optional umschreiben zu

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fourier}_f(x) \\ = \ & \frac{3}{16}\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{4k^2\pi}\right)\cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{(-1)^k}{2(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi}\right)\cos((2k+1)x) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2+(-1)^k}{4k}\right)\sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}\right)\sin((2k+1)x)\ .\end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned}a_0 &= \tfrac{3}{8}\pi \\ a_1 &= -\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{\pi}\left((-1) - \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi} = -\tfrac{\pi+2}{2\pi} \\ a_2 &= -\tfrac{1}{4}\sin\left(\tfrac{2\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{4\pi}\left((-1)^2 - \cos\left(\tfrac{2\pi}{2}\right)\right) = \tfrac{1}{4\pi}\left(1-(-1)\right) = \tfrac{1}{2\pi} \\ b_1 &= \left((-1)^2 + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \tfrac{1}{\pi} = \tfrac{\pi-1}{\pi} \\ b_2 &= \tfrac{1}{2}\left((-1)^3 + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{2\pi}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{4\pi}\sin\left(\tfrac{2\pi}{2}\right) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{2} b_k\sin(kx) \\ &= \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi+2}{2\pi}\cos(x) + \frac{1}{2\pi}\cos(2x) + \frac{\pi-1}{\pi}\sin(x) - \frac{3}{4}\sin(2x)\ .\end{aligned}$$

Dank Orthogonalitätsrelationen ist für $n, k \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\langle\cos(nx)|\cos(kx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \begin{cases}2\pi & \text{für } n=k=0 \\ \pi & \text{für } n=k\neq 0 \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \\ \langle\cos(nx)|\sin(kx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= 0 \\ \langle\sin(nx)|\sin(kx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \begin{cases}\pi & \text{für } n=k\neq 0 \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

.

Damit folgt nun

$$
\begin{aligned}
& \langle f_2(x)|f_2(x)\rangle \\
= \; & \langle \tfrac{3\pi}{16} - \tfrac{\pi+2}{2\pi}\cos(x) + \tfrac{1}{2\pi}\cos(2x) + \tfrac{\pi-1}{\pi}\sin(x) - \tfrac{3}{4}\sin(2x) | \tfrac{3\pi}{16} - \tfrac{\pi+2}{2\pi}\cos(x) + \tfrac{1}{2\pi}\cos(2x) + \tfrac{\pi-1}{\pi}\sin(x) - \tfrac{3}{4}\sin(2x)\rangle \\
= \; & \langle \tfrac{3\pi}{16} | \tfrac{3\pi}{16}\rangle + \langle -\tfrac{\pi+2}{2\pi}\cos(x) | -\tfrac{\pi+2}{2\pi}\cos(x)\rangle + \langle \tfrac{1}{2\pi}\cos(2x) | \tfrac{1}{2\pi}\cos(2x)\rangle \\
& + \langle \tfrac{\pi-1}{\pi}\sin(x) | \tfrac{\pi-1}{\pi}\sin(x)\rangle + \langle -\tfrac{3}{4}\sin(2x) | -\tfrac{3}{4}\sin(2x)\rangle \\
= \; & \tfrac{9\pi^3}{128} + \tfrac{(\pi+2)^2}{4\pi} + \tfrac{1}{4\pi} + \tfrac{(\pi-1)^2}{\pi} + \tfrac{9\pi}{16} \\
= \; & \tfrac{9\pi^3}{128} + \tfrac{\pi^2+4\pi+5}{4\pi} + \tfrac{\pi^2-2\pi+1}{\pi} + \tfrac{9\pi}{16} \\
= \; & \tfrac{9}{128}\pi^3 + \tfrac{29}{16}\pi - 1 + \tfrac{9}{4\pi}\ .
\end{aligned}
$$