

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 10

Hausaufgabe 28 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gerade 2π -periodische Funktion, die für $0 \leq x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = |\cos(x)|.$$

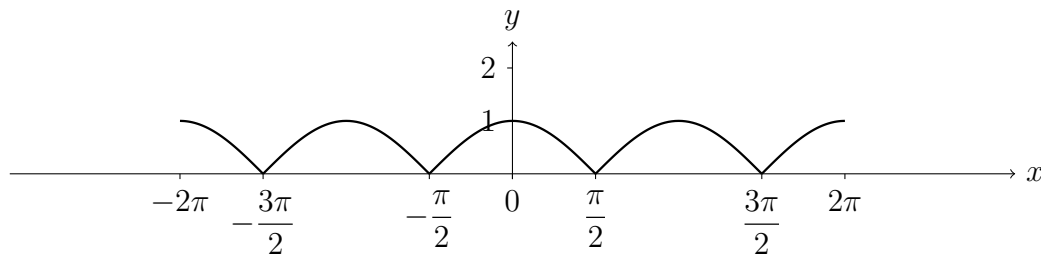
- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
 (b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.
 (c) Verwenden Sie die Gleichheit $f(0) = \text{Fourier}_f(0)$, um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

zu berechnen.

Lösung.

- (a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f auf $[-2\pi, 2\pi]$.



- (b) Die Funktion ist gerade, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $b_n = 0$ für $n \geq 1$. Wir haben also nur die Koeffizienten a_n für $n \geq 0$ zu berechnen.

Für $n \geq 0$ wird

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(x)| \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) \cos(x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) \cos(x) \, dx \right). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \cos(nx) \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x} + e^{i(n-1)x} + e^{-i(n-1)x}) \\ &= \frac{1}{4}(2 \cos((n+1)x) + 2 \cos((n-1)x)) \\ &= \frac{1}{2} \cos((n+1)x) + \frac{1}{2} \cos((n-1)x) \end{aligned}$$

Fall $n \neq 1$. Wir setzen fort mit

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) \cos(x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) \cos(x) \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos((n+1)x) + \frac{1}{2} \cos((n-1)x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos((n+1)x) + \frac{1}{2} \cos((n-1)x) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n+1} \sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1} \sin((n-1)x) \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{n+1} \sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1} \sin((n-1)x) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n-1} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) \right) .
 \end{aligned}$$

Falls n ungerade ist, dann ist $\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Somit ist diesenfalls $a_n = 0$.

Falls n gerade ist, also $n = 2k$, dann ist

$$\begin{aligned}
 \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \\
 \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^k
 \end{aligned}$$

Wir setzen fort mit

$$\begin{aligned}
 a_{2k} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} (-1)^k - \frac{1}{2k-1} (-1)^k \right) \\
 &= \frac{2(-1)^k}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) \\
 &= \frac{2(-1)^k (2k-1) - (2k+1)}{\pi (2k+1)(2k-1)} \\
 &= -\frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} .
 \end{aligned}$$

Fall $n = 1$. Wir setzen fort mit

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x) \cos(x) \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

Somit wird

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2kx) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx) .$$

(c) Da f stetig ist, können wir $f(0) = \text{Fourier}_f(0)$ verwenden, um

$$1 = f(0) = \text{Fourier}_f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2k \cdot 0) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} .$$

zu erhalten. Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} .$$

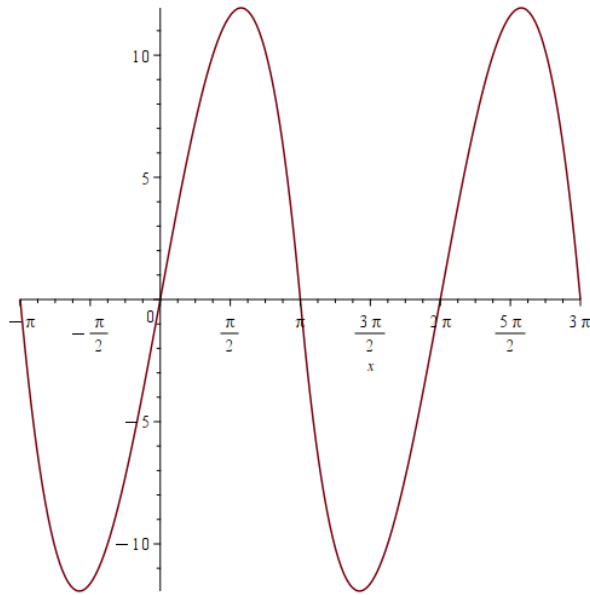
Hausaufgabe 29 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, die für $-\pi < x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2) .$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leq x \leq 3\pi$.
 (b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

- (a) Der Graph der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leq x \leq 3\pi$:



- (b) Die Funktion ist ungerade, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $a_n = 0$ für $n \geq 0$.

Wir müssen nur b_n berechnen für $n \geq 1$. Es wird

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi^2 - x^2) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left([(\pi^2 x - x^3)(-\frac{1}{n} \cos(nx))]_0^\pi - \int_0^\pi (\pi^2 - 3x^2)(-\frac{1}{n} \cos(nx)) \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (\pi^2 - 3x^2) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \left([(\pi^2 - 3x^2)\frac{1}{n} \sin(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi (0 - 6x)\frac{1}{n} \sin(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{12}{\pi n^2} \int_0^\pi x \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{12}{\pi n^2} \left([x(-\frac{1}{n} \cos(nx))]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\frac{1}{n} \cos(nx)) \, dx \right) \\ &= \frac{12}{\pi n^2} \left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{12}{\pi n^2} \left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n} [\frac{1}{n} \sin(nx)]_0^\pi \right) \\ &= \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

Somit ist

$$\text{Fourier}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx) .$$

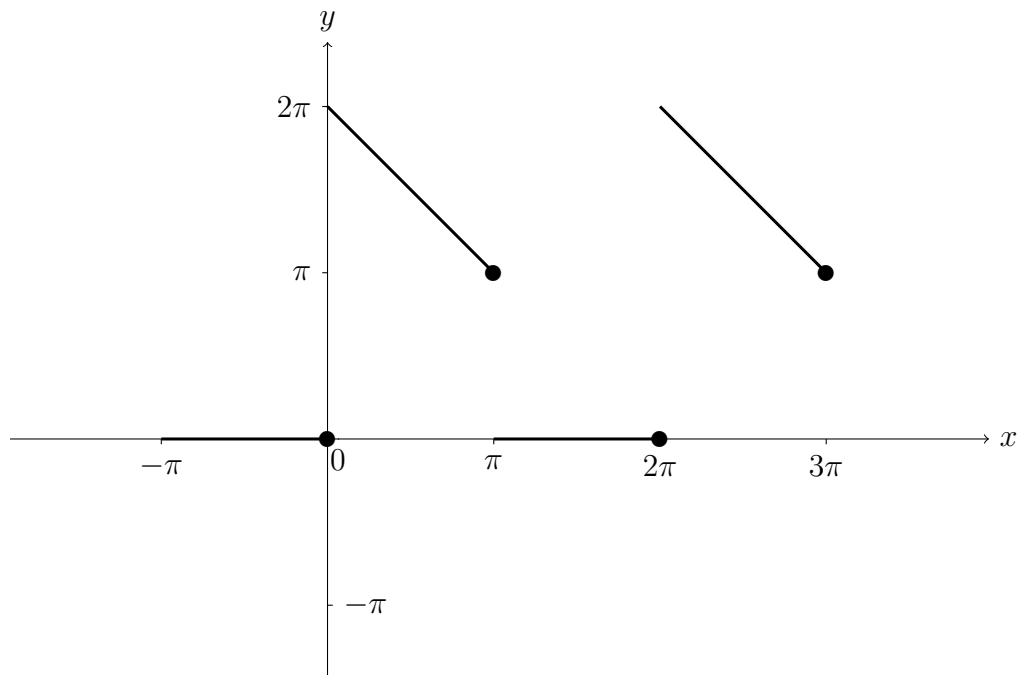
Hausaufgabe 30 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, die für $-\pi < x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ -x + 2\pi & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi < x \leq 3\pi$. Bestimmen Sie $\text{Fourier}_f(0)$.
- (b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.
- (c) Sei $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ für $x \in \mathbb{R}$.
 Skizzieren Sie den Graphen von $u(x)$ für $-\pi < x \leq 3\pi$. Welchen Wert hat $u(\pi)$?
 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $u(x)$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

- (a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für $-\pi \leq x \leq 3\pi$:



An der Sprungstelle $x_0 = 0$ ist $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 2\pi$. Also ist

$$\text{Fourier}_f(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \right) = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$

- (b) Es wird

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} -x + 2\pi \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2\pi x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi^2 \right) \\ &= \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ wird

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos(nx) \, dx + \int_0^{\pi} (-x + 2\pi) \cos(nx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x + 2\pi) \cos(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[(-x + 2\pi) \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-1) \frac{1}{n} \sin(nx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1) \\
 &= \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) .
 \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ wird

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} (-x + 2\pi) \sin(nx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x + 2\pi) \sin(nx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[(-x + 2\pi) \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-1) \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\right) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left((-\pi + 2\pi) \left(-\frac{1}{n} \cos(n\pi)\right) - (-0 + 2\pi) \left(-\frac{1}{n} \cos(0)\right) \right) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{2\pi}{n} \right) - \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{n} (2 - (-1)^n) .
 \end{aligned}$$

Damit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

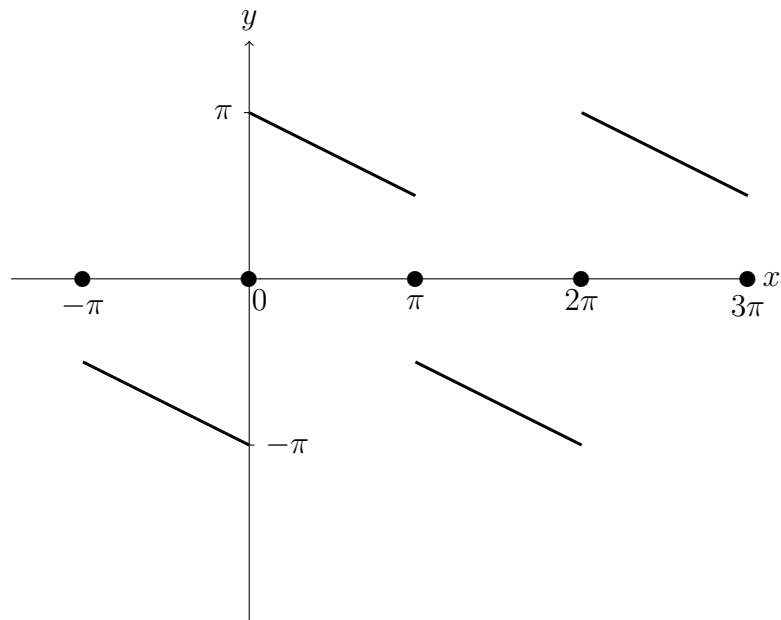
$$\begin{aligned}
 \text{Fourier}_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
 &= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - (-1)^n) \sin(nx) \\
 &= \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2k+1)^2} \cos((2k+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - (-1)^n) \sin(nx) .
 \end{aligned}$$

(c) Für $x \in (-\pi, \pi]$ wird

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } x = \pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}(0 - (x + 2\pi)) & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}(0 - 0) & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{2}((-x + 2\pi) - 0) & \text{falls } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}((-\pi + 2\pi) - (-\pi + 2\pi)) & \text{falls } x = \pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \pi & \text{falls } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{falls } x = \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $u(\pi) = 0$.

Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von u für $-\pi \leq x \leq 3\pi$:



Die Fourierreihe von $u(x)$ ist die Sinusreihe von Fourier $_f(x)$, also

$$\text{Fourier}_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - (-1)^n) \sin(nx) .$$