Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 11

Hausaufgabe 31 Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} t & \text{falls } x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{falls } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von f ist gegeben durch

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-\pi)(-1)^k - t}{\pi k} \sin(kx)$$

(a) Skizzieren Sie im Fall $t = 0$ den Graphen einer Stammfunktion von $f(x)$ für $x \in [-\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie t so, dass eine 2π-periodische Stammfunktion von f existiert. Bestimmen Sie die 2π-periodische Stammfunktion F von f mit $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $F(x)$ für $x \in [-\pi, 3\pi]$.

(d) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_F(x)$.

Lösung.

(a) Eine Stammfunktion von $f(x)$ wird erhalten als

$$F_0(x) \;:=\; \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\;.$$

Die untere Integralgrenze 0 haben wir dabei frei gewählt.

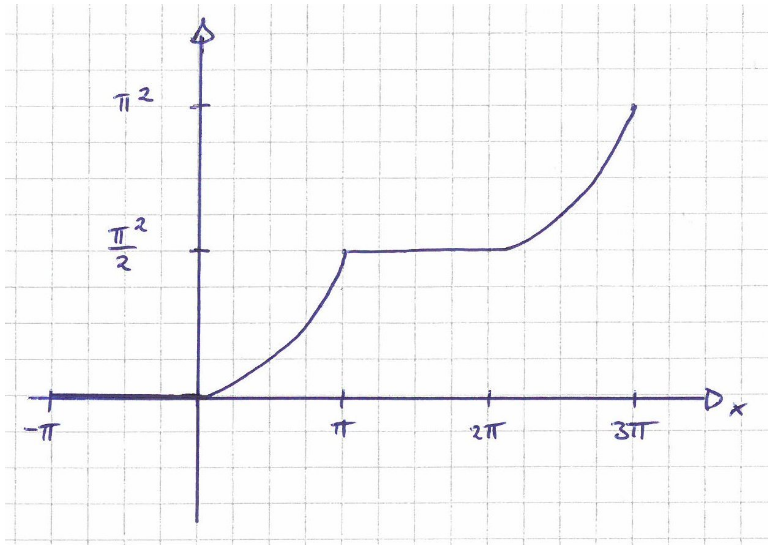
Für $s \in (-\pi, 3\pi]$ ist

$$f(s) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } s \in (-\pi, 0] \\ s & \text{falls } s \in (0, \pi] \\ 0 & \text{falls } s \in (\pi, 2\pi] \\ s - 2\pi & \text{falls } s \in (2\pi, 3\pi]\;. \end{cases}$$

Damit wird

$$F_0(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{falls } x \in (0, \pi] \\ \frac{1}{2}\pi^2 & \text{falls } x \in [\pi, 2\pi] \\ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(x - 2\pi)^2 & \text{falls } x \in (2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Wir skizzieren den Graphen der Stammfunktion F_0 auf $[-\pi, 3\pi]$.



(b) Damit die Funktion f eine periodische Stammfunktion besitzt, muss $a_0 = 0$ gelten. Damit folgt $\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = 0$ und daher $t = -\frac{\pi}{2}$.

Für $s \in (-\pi, \pi]$ ist

$$f(s) \;=\; \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{falls } s \in (-\pi, 0] \\ s & \text{falls } s \in (0, \pi]\;. \end{cases}$$

Die gesuchte Stammfunktion F ist dann für $x \in [-\pi, \pi]$ von der Form

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s + c \;=\; c + \begin{cases} -\frac{\pi}{2}x & \text{falls } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{falls } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante $c \in \mathbb{R}$.

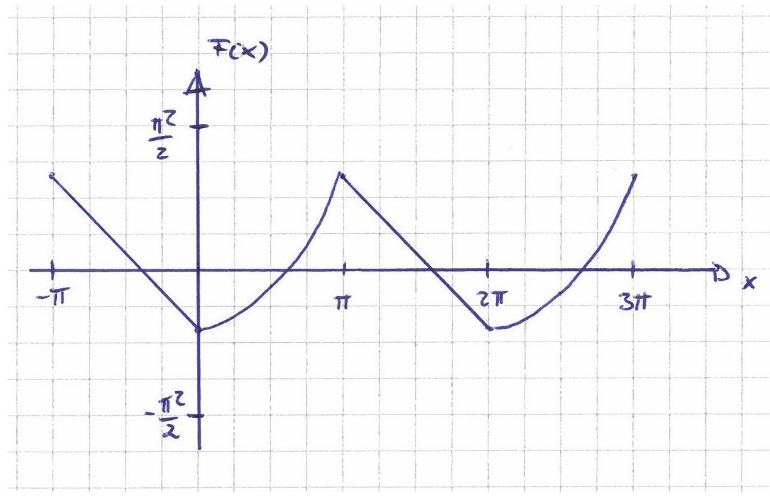
Wir wählen nun $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 0$ ist. Es soll sein

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi c + \int_{-\pi}^{0} -\tfrac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi c + \tfrac{\pi}{4}(-\pi)^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3 = 2\pi c + \tfrac{5}{12}\pi^3\;.$$

Damit erhalten wir $c = -\frac{5}{24}\pi^2$. Die gesuchte Stammfunktion ist nun für $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben durch

$$F(x) \;=\; -\tfrac{5}{24}\pi^2 + \begin{cases} -\frac{\pi}{2}x & \text{falls } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{falls } x \in (0, \pi] \end{cases}\;.$$

(c) Skizze des Graphen von $F(x)$:



(d) Da die 2π-periodische Funktion f stückweise stetig ist, und mit $t = \frac{\pi}{2}$ auch $a_0 = 0$ ist, ergibt sich die Fourier-Reihe von $F(x)$ aus der Fourier-Reihe von f durch summandenweises Aufleiten wie folgt.

$$\begin{aligned}\mathrm{Fourier}_F(x) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{b_k}{k} \cos(kx) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k - 1}{2k^2} \cos(kx)\end{aligned}$$

Hausaufgabe 32 Wie in Platzaufgabe 33 sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ x & \text{für } x \in [0, \pi] \ . \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ unter Verwendung von $\mathrm{Fourier}_f(x)$ aus Platzaufgabe 33.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ abermals, indem Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt nach Definition berechnen.

Lösung.

(a) Die Koeffizienten c_k von $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ stehen mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\mathrm{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i} b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i} b_k}{2} \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Es ist, nach Platzaufgabe 33,

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}}_{a_k} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{b_k} \sin(kx) \ .$$

Wir erhalten

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

und, für $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - \mathrm{i} b_k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{-(-1)^k}{k} = \frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \\ c_{-k} &= \frac{a_k + \mathrm{i} b_k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{-(-1)^k}{k} = \frac{-\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k)x} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \ . \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\pi\ .$$

Für $k \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[x\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\frac{1}{-\mathrm{i}k}(-1)^k - \left[\frac{-1}{k^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k^2}(-1)^k - \frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1)\ .
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ .$$

Erwartungsgemäß ist das die gleiche Fourier-Reihe wie in (a).

Statt $\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}$ kann man auch $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ schreiben, das bedeutet dasselbe.

Hausaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $x \in (-\pi, \pi]$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ x^2 & \text{für } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{für } x = \pi\ . \end{cases}$$

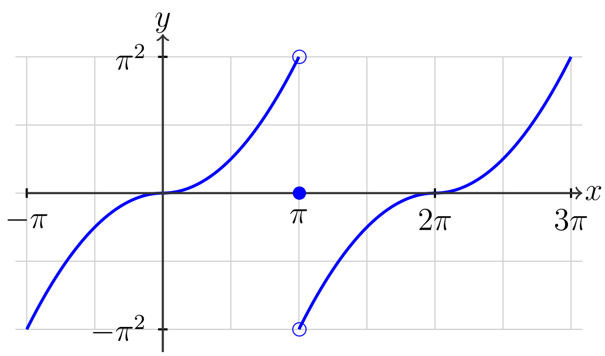
(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $-\pi < x < 3\pi$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus (b), um $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}((-1)^k \pi^2 k^2 - 2(-1)^k + 2)^2$ zu berechnen.

Lösung.

(a) Skizze des Graphen von $f(x)$:



(b) Da die Funktion ungerade ist, ist $a_n = 0$ für $n \geqslant 0$. Wir berechnen für $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[x^2(-\frac{1}{n}\cos(nx)) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \left(-\frac{1}{n}\cos(nx) \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi^2 \cos(n\pi) + \int_0^{\pi} 2x \cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi^2(-1)^n + \left[2x \left(\frac{1}{n}\sin(nx) \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \left(\frac{1}{n}\sin(nx) \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi^2(-1)^n + 2\pi \left(\frac{1}{n} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \right) - \left[-\frac{2}{n^2}\cos(nx) \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi^2(-1)^n + \frac{2}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^2}\cos(0) \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi^2(-1)^n + \frac{2}{n^2}(-1)^n - \frac{2}{n^2} \right) \\
&= \frac{4}{n^3\pi}((-1)^n - 1) - \frac{2\pi}{n}(-1)^n\ .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\text{Fourier}_f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^3\pi}((-1)^n-1)-\frac{2\pi}{n}(-1)^n\right)\sin(nx)\;.$$

(c) Zuerst berechnen wir das Quadrat der Norm von f.

$$\begin{aligned}
||f||^2 &= \langle f|f\rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{5}\pi^5\;.
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung von Parseval folgt nun:

$$\begin{aligned}
\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^3\pi}((-1)^n-1)-\frac{2\pi}{n}(-1)^n\right)^2 &= \pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = ||f||^2 = \frac{2}{5}\pi^5 \\
\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^3\pi}\left(2((-1)^n-1)-n^2\pi^2(-1)^n\right)\right)^2 &= \frac{2}{5}\pi^5 \\
\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^6\pi^2}\left(2((-1)^n-1)-n^2\pi^2(-1)^n\right)^2 &= \frac{2}{5}\pi^5 \\
\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^6\pi^2}\left(n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2\right)^2 &= \frac{2}{5}\pi^5 \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left(n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2\right)^2 &= \frac{1}{10}\pi^6\;.
\end{aligned}$$