

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 12

Hausaufgabe 34 Sei $f : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := 6 - x$.

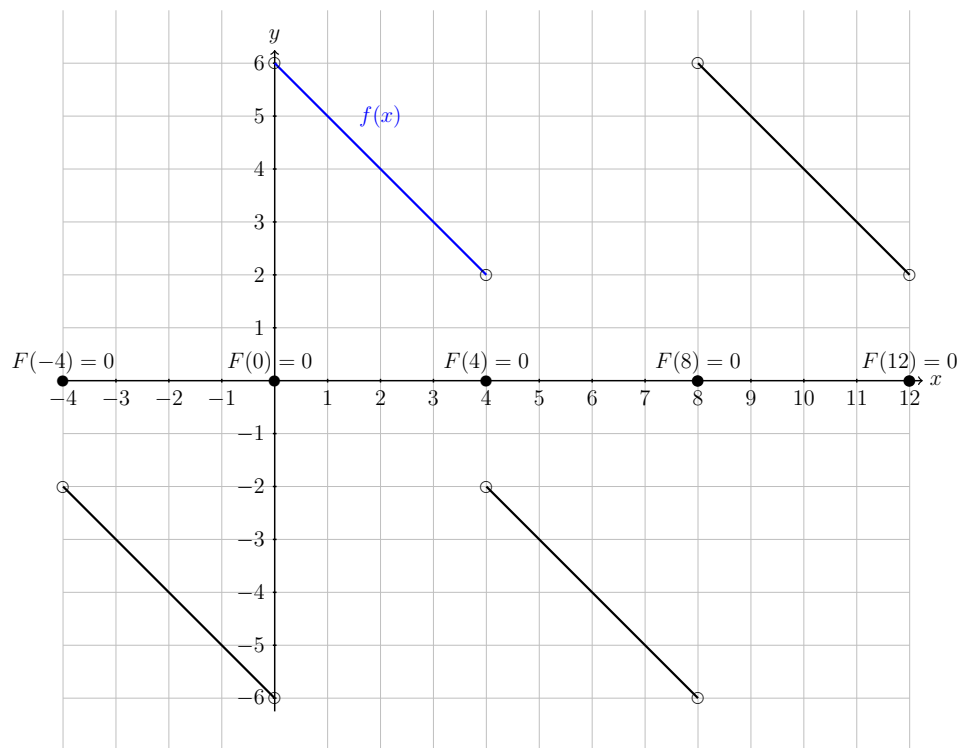
- (a) Sei $F(x)$ die ungerade 8-periodische Fortsetzung von $f(x)$.
 Skizzieren Sie den Graphen von $F(x)$ für $-4 \leq x \leq 12$.
 Markieren Sie darin den Graphen von $f(x)$.
 Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $F(4)$ an.

- (b) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_F(x)$.

- (c) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_F^{\mathbb{C}}(x)$.

Lösung.

- (a) Skizze von $F(x)$:



Da F ungerade und 8-periodisch ist, ist $F(0) = 0$ und $F(4) = 0$.

(b) Mit $L = 4$ und $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{4}$ berechnen sich die Fourier-Koeffizienten wie folgt.

Für $j \geq 1$ wird

$$\begin{aligned}
 b_j &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \sin\left(j \frac{\pi}{4} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 (6-x) \sin\left(j \frac{\pi}{4} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[(6-x) \left(-\frac{4}{j\pi} \cos\left(j \frac{\pi}{4} x\right) \right) \right]_0^4 - \int_0^4 (-1) \frac{4}{j\pi} \left(-\cos\left(j \frac{\pi}{4} x\right) \right) dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{j\pi} \cos(j\pi) + \frac{24}{j\pi} - \underbrace{\left[\frac{16}{j^2 \pi^2} \sin\left(j \frac{\pi}{4} x\right) \right]_0^4}_{=0} \right) \\
 &= -\frac{4}{j\pi} (-1)^j + \frac{12}{j\pi}.
 \end{aligned}$$

Für die Fourier-Reihe ergibt sich $\text{Fourier}_F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{j\pi} (-1)^j + \frac{12}{j\pi} \right) \sin\left(j \frac{\pi}{4} x\right)$.

(c) Da die Fourier-Koeffizienten a_k alle gleich 0 sind, erhalten wir mit (b) die Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2} \left(-\frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{12}{k\pi} \right) = \left(\frac{2}{k\pi} (-1)^k - \frac{6}{k\pi} \right) i$$

und

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2} \left(-\frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{12}{k\pi} \right) = \left(-\frac{2}{k\pi} (-1)^k + \frac{6}{k\pi} \right) i$$

für $k \geq 1$.

Somit ist $c_k = \left(\frac{2}{k\pi} (-1)^k - \frac{6}{k\pi} \right) i$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

Dazu hin ist $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$.

Damit ergibt sich

$$\text{Fourier}_F^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{4} x} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} (-1)^k - \frac{6}{k\pi} \right) i e^{ik \frac{\pi}{4} x}.$$

Hausaufgabe 35 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$yu_x + xu_y = 0.$$

- (a) Überprüfen Sie, ob

$$u(x, y) := f(x^2 - y^2)$$

für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

- (b) Finden Sie eine Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung, die $u(1, y) = \sin(y^2)$ für $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

- (c) Sei $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie: Es ist $C(t) \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \right\}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Skizzieren Sie die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

- (d) Sei u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung, nicht notwendigerweise aus (a). Berechnen Sie für C aus (c) die Ableitung $\frac{d}{dt}u(C(t))$. Argumentieren Sie, weshalb $u(C(t))$ stets eine konstante Funktion ist.

Lösung.

- (a) Wir setzen $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$ in die Differentialgleichung ein. Es wird

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= y \cdot \left(\frac{d}{dx} f(x^2 - y^2) \right) + x \cdot \left(\frac{d}{dy} f(x^2 - y^2) \right) \\ &= y \cdot (2x \cdot f'(x^2 - y^2)) + x \cdot (-2y \cdot f'(x^2 - y^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

- (b) Wir suchen eine Lösung wie in (a), also von der Form $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$, mit

$$u(1, y) = f(1^2 - y^2) \stackrel{!}{=} \sin(y^2).$$

Wir suchen also eine differenzierbare Funktion f mit $f(1 - y^2) = \sin(y^2)$. Die Funktion $f(t) := \sin(-t + 1)$ erfüllt

$$f(1 - y^2) = \sin(-(1 - y^2) + 1) = \sin(y^2)$$

wie gewünscht. Damit wird

$$u(x, y) = f(x^2 - y^2) = \sin(-(x^2 - y^2) + 1) = \sin(y^2 - x^2 + 1)$$

eine Lösung wie gesucht.

- (c) Wir sollen überprüfen, ob für $t \in \mathbb{R}$

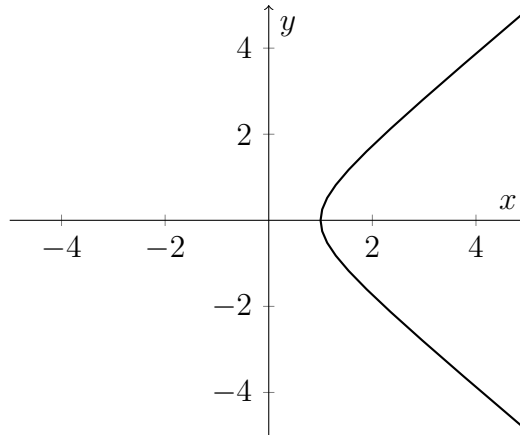
$$C(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \right\} \text{ gilt.}$$

Mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ ist

$$x^2 - y^2 = \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$$

und folglich $\begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Skizze von $K := C(\mathbb{R})$:



Es ist $\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \}$ eine Hyperbel. Die Punkte der Kurve K liegen, wie eben gezeigt, auf dieser Hyperbel. Die Kurve durchläuft alle Punkte der Menge, die eine positive x -Komponente haben, da $\cosh(t) > 0$ stets und da $\sinh$ surjektiv ist. Damit ist K gerade der rechte Ast dieser Hyperbel.

(d) Sei $u(x, y)$ eine Funktion, die

$$y \cdot u_x(x, y) + x \cdot u_y(x, y) = 0$$

erfüllt für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Setzt man hier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir

$$\sinh(t) \cdot u_x(\cosh(t), \sinh(t)) + \cosh(t) \cdot u_y(\cosh(t), \sinh(t)) = 0.$$

Nun wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(C(t)) &= \frac{d}{dt} u(\cosh(t), \sinh(t)) \\ &= u_x(\cosh(t), \sinh(t)) \cdot \frac{d}{dt} \cosh(t) + u_y(\cosh(t), \sinh(t)) \cdot \frac{d}{dt} \sinh(t) \\ &= u_x(\cosh(t), \sinh(t)) \cdot \sinh(t) + u_y(\cosh(t), \sinh(t)) \cdot \cosh(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gemäß der vorbereitenden Rechnung.

Da nun $\frac{d}{dt} u(\cosh(t), \sinh(t)) = 0$ ist, ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto u(\cosh(t), \sinh(t))$ stets eine konstante Funktion.

Hausaufgabe 36 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{yy} .$$

- (a) Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $u(x, y) := f(x) \cdot g(y)$ die Differentialgleichung löst und $u_{xx}(x, y)$ nichtkonstant ist.
- (b) Finden Sie eine Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung, die $u(x, 0) = \cos(3x)$ für $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.
- (c) Finden Sie eine Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung, die $u(0, y) = \exp(3y)$ für $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung.

- (a) Wir setzen den Ansatz $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ in die Differentialgleichung $u_{xx} = u_{yy}$ ein:

$$f''(x) \cdot g(y) = f(x) \cdot g''(y)$$

Wir formen um zu

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} .$$

Die linke Seite $\frac{f''(x)}{f(x)}$ ist unabhängig von y . Die rechte Seite $\frac{g''(y)}{g(y)}$ ist unabhängig von x . Daher folgt

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Erfüllen umgekehrt $f(x)$ und $g(y)$ diese Gleichung für eine Konstante C , dann ist auch $f''(x) \cdot g(y) = f(x) \cdot g''(y)$, weswegen $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ dann $u_{xx} = u_{yy}$ erfüllt.

Es ergeben sich also die Bedingungen

$$f''(x) + C \cdot f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) + C \cdot g(y) = 0$$

Somit sind f und g Lösungen der gewöhnliche Differentialgleichung $z'' + C \cdot z = 0$.

Wir können also z.B.

$$C = 1, \quad f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad g(y) = \cos(y)$$

wählen als Lösungen von $z'' + z = 0$.

Dann ist $u(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ und daher $u_{xx}(x, y) = -\sin(x) \cos(y) (= u_{yy}(x, y))$ nicht-konstant.

Bei einer anderen Wahl von C kann man eine andersgeartete Lösung erhalten.

Wählt man z.B. $C = -1$, dann sollten f und g Lösungen von $z'' - z = 0$ sein. Wir können z.B. $f(x) = e^x$ und $g(y) = e^{-y}$ nehmen, was auf $u(x, y) = e^{x-y}$ führt. Hier ist $u_{xx}(x, y) = e^{x-y}$ nichtkonstant.

Wählt man aber $C = 0$, dann sollten f und g Lösungen von $z'' = 0$ sein. Dies führt zu einer Lösung mit $u_{xx}(x, y) = 0$ konstant, was vermieden werden sollte. Also ist diese Wahl für C nicht möglich.

(b) Wir setzen $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ an. Es soll

$$u(x, 0) = f(x) \cdot g(0) = \cos(3x)$$

sein, also $g(0) \neq 0$ und $f(x) = \frac{1}{g(0)} \cos(3x)$.

Ferner sollte

$$0 = u_{xx} - u_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x) \cdot g(y)) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x) \cdot g(y)) = f''(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g''(y)$$

sein, also

$$0 = -9 \frac{1}{g(0)} \cos(3x) \cdot g(y) - \frac{1}{g(0)} \cos(3x) \cdot g''(y) .$$

Es folgt

$$g''(y) + 9g(y) = 0 .$$

Diese Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom $X^2 + 9 = (X - 3i)(X + 3i)$, mit den Nullstellen $\lambda_1 = 3i$ und $\lambda_2 = -3i$.

Als eine Lösung dieser Differentialgleichung können wir z.B. die Funktion $g(y) = \cos(3y)$ wählen.

Insgesamt wird damit

$$u(x, y) = f(x) \cdot g(y) = \frac{1}{\cos(0)} \cos(3x) \cdot \cos(3y) = \cos(3x) \cos(3y) .$$

(c) Wir setzen $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ an. Es soll

$$u(0, y) = f(0) \cdot g(y) = e^{3y}$$

sein, also $f(0) \neq 0$ und $g(y) = \frac{1}{f(0)} e^{3y}$.

Ferner sollte

$$0 = u_{xx} - u_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x) \cdot g(y)) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x) \cdot g(y)) = f''(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot g''(y)$$

sein, also

$$0 = f''(x) \cdot \frac{1}{f(0)} e^{3y} - f(x) \cdot 9 \frac{1}{f(0)} e^{3y} .$$

Es folgt

$$f''(x) - 9f(x) = 0 .$$

Diese Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom $X^2 - 9 = (X - 3)(X + 3)$, mit den Nullstellen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$.

Als eine Lösung dieser Differentialgleichung können wir z.B. die Funktion $f(x) = e^{3x}$ wählen.

Insgesamt wird

$$u(x, y) = f(x) \cdot g(y) = e^{3x} \cdot \frac{1}{e^{0.3}} e^{3y} = e^{3x+3y} .$$