Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 13

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \tfrac{1}{7} u_{xx} \ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (2-x)^2 & \text{falls } 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{für } x \in [0,2].$$

Die Fourierkoeffizienten b_n der ungeraden 4-periodischen Fortsetzung von f sind für $n \geqslant 1$ gegeben durch $b_n = \frac{16}{\pi^3 n^3}(n \sin(\frac{n\pi}{2})\pi + (-1)^n - 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{7} u_{xx}$.

(c) Überprüfen Sie: Die Funktion $u(x,2)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = 1$. Verwenden Sie dazu, dass $b_n = 0$ ist für gerades n und dass $n\pi > 2$ ist für ungerades n.

Lösung.

(a) Mit $a^2 = \frac{1}{7}$ und $L = 2$ ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big) \, \mathrm{e}^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^3 n^3} \Big(n \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \pi + (-1)^n - 1 \Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{2} x\Big) \, \mathrm{e}^{-\frac{\frac{1}{7} n^2 \pi^2}{4} t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^3 n^3} \Big(n \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \pi + (-1)^n - 1 \Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{2} x\Big) \, \mathrm{e}^{-\frac{n^2 \pi^2}{28} t} \ . \end{aligned}$$

(b) Es wird, durch summandenweises Ableiten,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^3 n^3} \Big(n \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \pi + (-1)^n - 1 \Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{2} x\Big) \, \mathrm{e}^{-\frac{n^2 \pi^2}{28} t} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^3 n^3} \Big(n \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \pi + (-1)^n - 1 \Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{2} x\Big) \, \frac{-n^2 \pi^2}{28} \mathrm{e}^{-\frac{n^2 \pi^2}{28} t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{7\pi n} \Big(n \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \pi + (-1)^n - 1 \Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{2} x\Big) \, \mathrm{e}^{-\frac{n^2 \pi^2}{28} t} \ . \end{aligned}$$

Es wird, durch summandenweises Ableiten,

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^3n^3}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\sin\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^3n^3}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\Big(\frac{n\pi}{2}\cos\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2n^2}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}\,.
\end{aligned}$$

Es wird, durch summandenweises Ableiten,

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2n^2}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2n^2}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\Big(-\frac{n\pi}{2}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi n}\Big(n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1\Big)\sin\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{28}t}
\end{aligned}$$

Also ist in der Tat $u_t = \frac{1}{7}u_{xx}$.

(c) Für $n = 2k$ gerade, wobei $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, ist in der Tat

$$b_n \;=\; b_{2k} \;=\; \tfrac{16}{\pi^3(2k)^3}\big(2k\sin\big(\tfrac{2k\pi}{2}\big)\,\pi+(-1)^{2k}-1\big) \;=\; \tfrac{16}{\pi^3(2k)^3}\big(2k\sin(k\pi)\pi+1-1\big) \;=\; 0\,.$$

Auch ohne Vorfaktor ist für gerades n damit

$$n\sin(\tfrac{n\pi}{2})\pi+(-1)^n-1 \;=\; 0\,.$$

Mit (b) wird

$$\begin{aligned}
u_x\,(1,2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2n^2}\Big(\underbrace{n\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\,\pi+(-1)^n-1}_{\substack{=0 \text{ für}\\ n \text{ gerade}}}\Big)\underbrace{\cos\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)}_{\substack{=0 \text{ für}\\ n \text{ ungerade}}}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{14}}\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Also liegt bei $x_0 = 1$ eine kritische Stelle der Funktion $u(x,2)$ vor.

Wir wollen mittels der zweiten Ableitung nach x noch überprüfen, ob bei der kritischen Stelle $x_0 = 1$ tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt.

Zunächst betrachten wir einen in $u_{xx}(1,2)$ gemäß (b) auftretenden Faktor:

Für n ungerade ist $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \in \{-1,1\}$ und $(-1)^n - 1 = -2$. Daher ist für ungerades $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$

$$
\begin{aligned}
\left(n\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\pi + (-1)^n - 1\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) &= n\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)^2\pi - 2\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \\
&= n\pi - 2\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \\
&\geqslant 1\cdot\pi - 2 \\
&> 0\,.
\end{aligned}
$$

Somit folgt mit (b)

$$
u_{xx}(1,2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi n}\underbrace{\left(n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\pi + (-1)^n - 1\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{\substack{>0 \text{ falls } n \text{ ungerade,}\\ =0 \text{ falls } n \text{ gerade}}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{14}} \;<\; 0\,.
$$

Folglich liegt an der Stelle $x_0 = 1$ ein lokales Maximum vor.

Hausaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 2u_{xx} + r(x,t)\ ,$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0, \quad u(2,t) &= 0 && \text{für } t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= x(x-2) && \text{für } x \in [0,2]\ . \end{aligned}$$

Sei mittels Fourier-Reihe $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16((-1)^k-1)}{\pi^3 k^3} \sin(k\frac{\pi}{2}x)$ bekannt für $x \in [0,2]$.

(a) Sei nun $r(x,t) := 0$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx}$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen.

(b) Sei nun $r(x,t) := 5\sin(3\frac{\pi}{2}x)$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx} + 5\sin(3\frac{\pi}{2}x)$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen.

Lösung.

(a) Mit $a^2 = 2$, $L = 2$ und $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{16((-1)^k-1)}{\pi^3 k^3}}_{=b_k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$ ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2}t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{2n^2\pi^2}{2^2}t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t} \end{aligned}$$

(b) Die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ für die ungerade 4-periodische Fortsetzung in x-Richtung von

$$r(x,t) = 5\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n(t) \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)$$

ergeben sich durch direktes Ablesen:

$$\tilde{b}_n(t) = \begin{cases} 5 & \text{für } n = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$b_n'(t) = \tilde{b}_n(t)\mathrm{e}^{\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} = \tilde{b}_n(t)\mathrm{e}^{\frac{2n^2\pi^2 t}{4}} = \begin{cases} 5\mathrm{e}^{\frac{9\pi^2 t}{2}} & \text{für } n = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufleiten gibt

$$b_n(t) = \left\{ \begin{matrix} 5\frac{2}{9\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi^2 t}{2}} + c_3 & \text{für } n = 3 \\ c_n & \text{sonst} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \frac{10}{9\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi^2 t}{2}} + c_3 & \text{für } n = 3 \\ c_n & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den Integrationskonstanten $c_n \in \mathbb{R}$ für $n \geqslant 1$.

Als Zwischenergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{L^2}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{2} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 t}{2}}\right) + \left(\tfrac{10}{9\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi^2 t}{2}} + c_3\right)\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{9\pi^2 t}{2}} \\
&\quad + \left(\sum_{n=4}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 t}{2}}\right) \\
&= \left(\tfrac{10}{9\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi^2 t}{2}}\right)\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{9\pi^2 t}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 t}{2}} \\
&= \tfrac{10}{9\pi^2}\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 t}{2}} \;.
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt

$$u(x,0) = \tfrac{10}{9\pi^2}\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \;.$$

Wir bestimmen c_n durch Einsetzen der Anfangsbedingung und Abgleich der Fourier-Koeffizienten:

$$\tfrac{10}{9\pi^2}\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \;.$$

Daher erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\tfrac{10}{9\pi^2} + c_3 &\overset{!}{=} \tfrac{16((-1)^3-1)}{\pi^3 3^3} \\
c_n &\overset{!}{=} \tfrac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3} \qquad \text{für } n \neq 3,
\end{aligned}$$

d.h. $c_3 = -\frac{32}{27\pi^3} - \frac{10}{9\pi^2} = -\frac{32+30\pi}{27\pi^3}$ und $c_n = \frac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}$ für $n \neq 3$.
Einsetzen in obiges Zwischenergebnis gibt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \tfrac{10}{9\pi^2}\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right) \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi^2 t}{2}} \\
&= \left(\tfrac{10}{9\pi^2} - \tfrac{32+30\pi}{27\pi^3}\mathrm{e}^{-\frac{9\pi^2}{2}t}\right)\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 3}}^{\infty} \tfrac{16((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t} \;.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + 1$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad u(\pi,t) = t && \text{für } t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= 0 && \text{für } x \in [0,\pi]\ . \end{aligned}$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{u}(x,t)$ für das Problem aus (a).

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Ausgangsproblems unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Mit $L = \pi$, $f(x) = 0$, $g(t) = u(0,t) = 0$, $h(t) = u(\pi,t) = t$ und $r(x,t) = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x,t) &= r(x,t) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) g'(t) - \frac{x}{\pi} h'(t) = 1 - 0 - \frac{x}{\pi} \cdot 1 = 1 - \frac{x}{\pi} \\ \tilde{f}(x) &= f(x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) g(0) - \frac{x}{\pi} h(0) = 0 - 0 - 0 = 0\ . \end{aligned}$$

Das reduzierte Problem lautet also:

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + 1 - \frac{x}{\pi}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$\tilde{u}(0,t) = 0 = \tilde{u}(\pi,t) \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$\tilde{u}(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in [0,\pi]\ .$$

(b) Die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_k(t)$ für die ungerade 2π-periodische Fortsetzung in x-Richtung von $\tilde{r}(x,t) = 1 - \frac{x}{\pi}$ sind für $k \geqslant 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin(kx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{k} \cos(kx)\right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{k} \cos(kx)\right) \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left(0 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kx)\, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\pi k^2} \underbrace{[\sin(kx)]_0^\pi}_{=0} \right) \\ &= \frac{2}{k\pi}\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$b_k'(t) = \tilde{b}_k(t) \mathrm{e}^{\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{L^2}} = \tilde{b}_k(t) \mathrm{e}^{\frac{k^2 \pi^2 t}{\pi^2}} \; = \; \frac{2}{k\pi} \mathrm{e}^{k^2 t} \; .$$

Aufleiten gibt

$$b_k(t) \; = \; \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{k^2 t} + c_k \; = \; \frac{2}{k^3 \pi} \mathrm{e}^{k^2 t} + c_k$$

mit den Integrationskonstanten $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \geqslant 1$.

Als Zwischenergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) \; &= \; \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{L^2}} \\ &= \; \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^3 \pi} \mathrm{e}^{k^2 t} + c_k \right) \sin(kx) \, \mathrm{e}^{-k^2 t} \; . \end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt

$$\tilde{u}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^3 \pi} + c_k \right) \sin(kx) \; .$$

Wir bestimmen c_k durch Einsetzen der Anfangsbedingung

$$\tilde{f}(x) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot \sin(kx) \; \stackrel{!}{=} \; \tilde{u}(x,0) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^3 \pi} + c_k \right) \sin(kx) \; .$$

Vergleich der Fourier-Koeffizienten gibt für $k \geqslant 1$ die Bedingung

$$\frac{2}{k^3 \pi} + c_k \stackrel{!}{=} 0 \; .$$

Daraus folgt $c_k = -\frac{2}{k^3 \pi}$. Einsetzen in das Zwischenergebnis gibt

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^3 \pi} \mathrm{e}^{k^2 t} - \frac{2}{k^3 \pi} \right) \sin(kx) \mathrm{e}^{-k^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3 \pi} \left(1 - \mathrm{e}^{-k^2 t} \right) \sin(kx) \; .$$

(c) Die Lösung des ursprünglichen Problems ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tilde{u}(x,t) + \left(1 - \frac{x}{\pi} \right) g(t) + \frac{x}{\pi} h(t) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3 \pi} \left(1 - \mathrm{e}^{-k^2 t} \right) \sin(kx) \right) + \frac{x}{\pi} t \; . \end{aligned}$$