Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 13

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; 4u_{xx} + \sin(\tfrac{\pi}{3}x)\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; 3 - x \quad \text{für } x \in (0,3)\;,$$

sowie $u(0,0) = 0$ und $u(3,0) = 0$. Das Ergebnis von Hausaufgabe 34 kann verwendet werden.

(a) Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der zugehörigen homogenen Wärmeleitungsgleichung $u_t \;=\; 4u_{xx}$ unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

(b) Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der betrachteten inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $u_t \;=\; 4u_{xx} + \sin(\frac{\pi}{3}x)$ unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

Lösung.

(a) Für die Fourier-Reihe der ungeraden 6-periodischen Fortsetzung von $f(x) = x - 3$ ergibt sich $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{6}{k\pi} \sin\left(\dfrac{k\pi x}{3}\right)$, siehe Hausaufgabe 34.

Als Lösung erhalten wir also mit $L = 3$ und $a^2 = 4$ wegen $\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{3}$

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{4k^2\pi^2 t}{9}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{4k^2\pi^2 t}{9}}\;.$$

(b) Die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ für die ungerade 6-periodische Fortsetzung in x-Richtung von $r(x,t) = \sin(\frac{\pi}{3}x) \overset{!}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n(t) \sin\left(\dfrac{n\pi x}{3}\right)$ ergeben sich durch direktes Ablesen:

$$\tilde{b}_n(t) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten $b_n(t)$ ergeben sich durch Integration von

$$b_n'(t) = \tilde{b}_n(t)\mathrm{e}^{\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} = \tilde{b}_n(t)\mathrm{e}^{\frac{4n^2\pi^2 t}{9}} \;=\; \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{4\pi^2 t}{9}} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$b_n(t) \;=\; \begin{cases} \frac{9}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{4\pi^2 t}{9}} + c_1 & \text{für } n = 1 \\ c_n & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den Integrationskonstanten $c_n \in \mathbb{R}$.
Nun ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \\ &= \left(\tfrac{9}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{4\pi^2 t}{9}} + c_1\right) \sin\left(\tfrac{\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2 t}{9}} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{\frac{-4n^2\pi^2 t}{9}} \ . \end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt

$$u(x,0) = \left(\tfrac{9}{4\pi^2} + c_1\right) \sin\left(\tfrac{\pi x}{3}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \ .$$

Wir bestimmen c_n durch Einsetzen der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{n\pi} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \ ;$$

siehe Hausaufgabe 34. Daher erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} b_1(0) &= \tfrac{9}{4\pi^2} + c_1 \overset{!}{=} \tfrac{6}{\pi} \\ b_n(0) &= c_n \overset{!}{=} \tfrac{6}{n\pi} \qquad \text{für } n \geqslant 2, \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = \frac{6}{\pi} - \frac{9}{4\pi^2}$ und $c_n = \frac{6}{n\pi}$ für $n \geqslant 2$.
Insgesamt ist

$$u(x,t) = \left(\tfrac{9}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\frac{4\pi^2 t}{9}} + \tfrac{6}{\pi} - \tfrac{9}{4\pi^2}\right) \sin\left(\tfrac{\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2 t}{9}} + \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{6}{n\pi} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{\frac{-4n^2\pi^2 t}{9}} \ .$$

Hausaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; \tfrac{1}{2}u_{xx}\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) \;=\; 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; -\sin(x)+\sin(5x)+\frac{1}{4}\sin(7x) \qquad \text{für } x\in[0,\pi]\;.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$.

(c) Die Funktion $u(\frac{\pi}{6},t)$ besitzt ein globales Minimum auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Bestimmen Sie die Stelle $t_0\in\mathbb{R}_{>0}$, bei der $u(\frac{\pi}{6},t)$ dieses Minimum annimmt.

Lösung.

(a) Es ist $L=\pi$ und also $\frac{\pi}{L}=1$. Es ist $a^2=\frac{1}{2}$.

Da $f(x) = -\sin(x)+\sin(5x)+\frac{1}{4}\sin(7x)$ bereits als reine Sinus-Reihe mit Periode 2π vorliegt, ergeben sich die Fourierkoeffizienten der ungeraden 2π-periodischen Fortsetzung von $f(x)$ durch Ablesen:

$$b_k \;=\; \begin{cases} -1 & \text{für } k=1 \\ 1 & \text{für } k=5 \\ \frac{1}{4} & \text{für } k=7 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn dann ist $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$.

Als Lösung erhalten wir dank $\frac{\pi^2}{L^2}=1$ damit

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)\mathrm{e}^{-k^2\frac{1}{2}t} = -\sin(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+\sin(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}+\frac{1}{4}\sin(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\;.$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} u_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(-\sin(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+\sin(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}+\tfrac{1}{4}\sin(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\big) \\ &= -\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+5\cos(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}+\tfrac{7}{4}\cos(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\;. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(-\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+5\cos(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}+\tfrac{7}{4}\cos(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\big) \\ &= \sin(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-25\sin(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}-\tfrac{49}{4}\sin(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\;. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_t &= \tfrac{\partial}{\partial t}\big(-\sin(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+\sin(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}+\tfrac{1}{4}\sin(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin(x)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\tfrac{25}{2}\sin(5x)\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}}-\tfrac{49}{8}\sin(7x)\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}}\;. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $u_t=\frac{1}{2}u_{xx}$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} u(\tfrac{\pi}{6},t) &= -\sin(\tfrac{\pi}{6})\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + \sin(\tfrac{5\pi}{6})\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}} + \tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{7\pi}{6})\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}} - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}} \ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\tfrac{\pi}{6},t) = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \tfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-\frac{25t}{2}} + \tfrac{49}{16}\mathrm{e}^{-\frac{49t}{2}} = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(1 - 25\mathrm{e}^{-12t} + \tfrac{49}{4}\mathrm{e}^{-24t}) \ .$$

Dies wird genau dann null, wenn $1 - 25\mathrm{e}^{-12t} + \frac{49}{4}\mathrm{e}^{-24t} = 0$ ist.
Substitution von $z = \mathrm{e}^{-12t}$ liefert die Bedingung

$$0 = 1 - 25z + \tfrac{49}{4}z^2 \ .$$

Mittels der Mitternachtsformel ergibt sich für die Nullstellen

$$z_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 49}}{\frac{49}{2}} = \frac{2}{49}(25 \pm 24)$$

d.h. $z_1 = 2$ und $z_2 = \frac{2}{49}$.
Es ist

$$\begin{aligned} 2 &= \mathrm{e}^{-12t_1} \Leftrightarrow \ln(2) = -12t_1 \Leftrightarrow -\tfrac{\ln(2)}{12} = t_1 \\ \tfrac{2}{49} &= \mathrm{e}^{-12t_2} \Leftrightarrow \ln(\tfrac{2}{49}) = -12t_2 \Leftrightarrow \tfrac{\ln(\frac{49}{2})}{12} = t_2 \end{aligned}$$

Somit ist $t_2 = \frac{\ln(\frac{49}{2})}{12}$ die einzige kritische Stelle von $u(\frac{\pi}{6},t)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Da die Existenz eines globalen Minimums auf $\mathbb{R}_{>0}$ als bekannt vorausgesetzt wurde, befindet sich dieses globale Minimum an der Stelle

$$t_2 = \tfrac{1}{12}\ln(\tfrac{49}{2}) \ .$$

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 1 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) + \tfrac{x}{\pi} \qquad \text{für } x \in [0,\pi] .$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Geben Sie eine Lösung $\tilde{u}(x,t)$ für das Problem aus (a) an.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ des Ausgangsproblems unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Um das Problem zu reduzieren, setzen wir

$$\tilde{r}(x,t) = r(x,t) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) g'(t) - \frac{x}{L} h'(t),$$

wobei

$$r(x,t) = 0\,, \quad L = \pi, \quad g(t) = 0 \quad \text{und} \quad h(t) = 1\,.$$

Somit ist $\tilde{r}(x,t) = 0 - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot 0 - 0 = 0$.

Für die Randbedingung gilt nun mit $f(x) = \sin(x) + \frac{x}{\pi}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x) - \left(1 - \tfrac{x}{L}\right) g(0) - \tfrac{x}{L} h(0) \\ &= \sin(x) + \tfrac{x}{\pi} - \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \cdot 0 - \tfrac{x}{\pi} \cdot 1 \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

Das reduzierte Problem lautet also

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} ,$$

mit Randbedingungen

$$\tilde{u}(0,t) = 0 = \tilde{u}(\pi,t) \text{ für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$\tilde{u}(x,0) = \sin(x) \text{ für } x \in [0,\pi] .$$

(b) Da $\tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x) = \sin(x)$ bereits als reine Sinus-Reihe vorliegt, ergeben sich die Fourierkoeffizienten der ungeraden 2π-periodischen Fortsetzung von $\tilde{f}(x)$ durch Ablesen:

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{für } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Als Lösung erhalten wir also mit $L = \pi$ und $a^2 = 1$ wegen $\frac{\pi}{L} = 1$

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \mathrm{e}^{-k^2 t} = \sin(x)\mathrm{e}^{-t} .$$

(c) Die Lösung des ursprünglichen Problems ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tilde{u}(x,t) + \left(1 - \tfrac{x}{L}\right) g(t) + \tfrac{x}{L} h(t) \\ &= \sin(x)\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{x}{\pi} . \end{aligned}$$