Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 15

Hausaufgabe 43 Wir betrachten die komplex differenzierbare Funktion

$$f \,:\, \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,:\, z \mapsto f(z) \,:=\, z^4 + z^3 \,.$$

(a) Bestimmen Sie $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))$ und $v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))$, wobei $x,\, y \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie: Es sind u und v harmonische Funktionen.

(b) Überprüfen Sie: Es erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

(c) Bestimmen Sie $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, für welche die harmonische Funktion $w(x,y) := \alpha\, u(x,y) + \beta\, v(x,y)$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\begin{aligned} w(x,0) &= x^4 + x^3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ w(0,y) &= y^4 - y^3 \quad \text{für } y \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Lösung.

(a) Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ wird mit dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} z^3 &= (x+\mathrm{i}y)^3 \\ &= \tbinom{3}{0} x^3 (\mathrm{i}y)^0 + \tbinom{3}{1} x^2 (\mathrm{i}y)^1 + \tbinom{3}{2} x^1 (\mathrm{i}y)^2 + \tbinom{3}{3} x^0 (\mathrm{i}y)^3 \\ &= x^3 + 3\mathrm{i}x^2 y - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z^4 &= (x+\mathrm{i}y)^4 \\ &= \tbinom{4}{0} x^4 (\mathrm{i}y)^0 + \tbinom{4}{1} x^3 (\mathrm{i}y)^1 + \tbinom{4}{2} x^2 (\mathrm{i}y)^2 + \tbinom{4}{3} x^1 (\mathrm{i}y)^3 + \tbinom{4}{4} x^0 (\mathrm{i}y)^4 \\ &= x^4 + 4\mathrm{i}x^3 y - 6x^2 y^2 - 4\mathrm{i}xy^3 + y^4 \,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f(z) \;=\; z^3 + z^4 \;=\; (x^3 - 3xy^2 + x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \mathrm{i}(3x^2 y - y^3 + 4x^3 y - 4xy^3) \,.$$

Wir lesen den Realteil und den Imaginärteil von $f(z)$ ab.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathrm{Re}(z^4 + z^3) = x^4 + x^3 - 6x^2y^2 - 3xy^2 + y^4 \\ v(x,y) &= \mathrm{Im}(z^4 + z^3) = 4x^3 y + 3x^2 y - 4xy^3 - y^3 \end{aligned}$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen von $u(x,y)$:

$$\begin{aligned} u_x &= 4x^3 + 3x^2 - 12xy^2 - 3y^2 \\ u_{xx} &= 12x^2 + 6x - 12y^2 \\ u_y &= -12x^2y - 6xy + 4y^3 \\ u_{yy} &= -12x^2 - 6x + 12y^2 \end{aligned}$$

Daher ist $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Somit ist u eine harmonische Funktion.

Wir berechnen die partiellen Ableitungen von $v(x,y)$:

$$\begin{aligned} v_x &= 12x^2y + 6xy - 4y^3 \\ v_{xx} &= 24xy + 6y \\ v_y &= 4x^3 + 3x^2 - 12xy^2 - 3y^2 \\ v_{yy} &= -24xy - 6y \end{aligned}$$

Daher ist $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Somit ist v eine harmonische Funktion.

(b) Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_x &= 4x^3 + 3x^2 - 12xy^2 - 3y^2 = v_y \\ u_y &= -12x^2y - 6xy + 4y^3 = -(12x^2y + 6xy - 4y^3) = -v_x \ . \end{aligned}$$

Daher erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

(c) Wir setzen an

$$w(x,y) = \alpha\, u(x,y) + \beta\, v(x,y) = \alpha(x^4 + x^3 - 6x^2y^2 - 3xy^2 + y^4) + \beta(4x^3y + 3x^2y - 4xy^3 - y^3)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Wir werten die Funktion $w(x,y)$ bei $y = 0$ aus und bestimmen so den Koeffizienten α.

$$w(x,0) = \alpha(x^4 + x^3) + \beta \cdot 0 \stackrel{!}{=} x^4 + x^3 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 1$$

Wir werten die Funktion $w(x,y)$ bei $x = 0$ aus, verwenden den bereits bestimmten Wert $\alpha = 1$ und bestimmen dann den Koeffizienten β.

$$w(0,y) = 1 \cdot y^4 + \beta(-y^3) \stackrel{!}{=} y^4 - y^3 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 1$$

Insgesamt erhalten wir

$$w(x,y) = x^4 + x^3 - 6x^2y^2 - 3xy^2 + y^4 + 4x^3y + 3x^2y - 4xy^3 - y^3.$$

Hausaufgabe 44 Wir suchen auf dem Bereich $\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi],\, y \in [0, 2\pi] \}$ eine Lösung der Potentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = \sin(x)\ , \qquad u(x, 2\pi) = 0 \qquad \text{für } x \in [0, 2\pi]$$

und

$$u(0, y) = 0\ , \qquad u(2\pi, y) = 0 \qquad \text{für } y \in [0, 2\pi].$$

Wir verwenden den Ansatz

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & a_{-1}\mathrm{e}^{-x}\cos(-y) + b_{-1}\mathrm{e}^{-x}\sin(-y) + c_{-1}\cos(-x)\mathrm{e}^{-y} + d_{-1}\sin(-x)\mathrm{e}^{-y} \\ & + a_1\mathrm{e}^{x}\cos(y) + b_1\mathrm{e}^{x}\sin(y) + c_1\cos(x)\mathrm{e}^{y} + d_1\sin(x)\mathrm{e}^{y} \end{aligned}$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1}, a_1, b_1, c_1, $d_1 \in \mathbb{R}$.

(a) Überprüfen Sie mittels einer Wronski-Matrix: Die Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, e^{-x} auf $[0, 2\pi]$ sind linear unabhängig.

(b) Welche Bedingungen ergeben sich für die Koeffizienten der angesetzten Funktion $u(x, y)$, wenn $y = 0$ gesetzt wird?
Welche Bedingungen ergeben sich nun zudem für die Koeffizienten der angesetzten Funktion $u(x, y)$, wenn $y = 2\pi$ gesetzt wird?

(c) Welche Bedingungen ergeben sich nun zudem für die Koeffizienten der angesetzten Funktion $u(x, y)$, wenn $x = 0$ gesetzt wird?
Welche Bedingungen ergeben sich nun zudem für die Koeffizienten der angesetzten Funktion $u(x, y)$, wenn $x = 2\pi$ gesetzt wird?

(d) Verwenden Sie (b, c), um eine Lösung der Potentialgleichung anzugeben, welche die obigen Randbedingungen erfüllt.

Lösung.

(a) Wir berechnen die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(x)$ und ihren Wert bei $x = 0$.

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \cos(x) & -\sin(x) & \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \\ -\sin(x) & -\cos(x) & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ -\cos(x) & \sin(x) & \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{W}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Determinante $\det(\mathrm{W}(0))$. Es ist

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{W}(0)) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-4 - 4) = 8 \neq 0\ . \end{aligned}$$

Somit sind die angeführten Funktionen linear unabhängig.

(b) Da die Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^{x}, e^{-x} auf $[0, 2\pi]$ linear unabhängig sind, können wir den Ansatz für $u(x, y)$ an den Randstellen auswerten und einen Koeffizientenvergleich mit der entsprechenden Randbedingung durchführen.

Wir werten den Ansatz für $u(x, y)$ in $y = 0$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich mit der Randbedingung $u(x, 0) = \sin(x)$ durch.

$$\begin{aligned} u(x,0) = a_{-1}\mathrm{e}^{-x} + c_{-1}\cos(-x) + d_{-1}\sin(-x) + a_1\mathrm{e}^{x} + c_1\cos(x) + d_1\sin(x) &\stackrel{!}{=} \sin(x) \\ a_1\mathrm{e}^{x} + a_{-1}\mathrm{e}^{-x} + (c_{-1} + c_1)\cos(x) + (d_1 - d_{-1})\sin(x) &\stackrel{!}{=} \sin(x) \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir also die Bedingungen

$$a_1 = 0 = a_{-1}\ , \qquad c_{-1} = -c_1\ , \qquad d_{-1} = d_1 - 1\ .$$

Wir werten den verbleibenden Ansatz für $u(x, y)$ in $y = 2\pi$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich mit der Randbedingung $u(x, 2\pi) = 0$ durch.

$$\begin{aligned} u(x,2\pi) = -c_1\cos(-x)\mathrm{e}^{-2\pi} + (d_1 - 1)\sin(-x)\mathrm{e}^{-2\pi} + c_1\cos(x)\mathrm{e}^{2\pi} + d_1\sin(x)\mathrm{e}^{2\pi} &\stackrel{!}{=} 0 \\ c_1\left(-\mathrm{e}^{-2\pi} + \mathrm{e}^{2\pi}\right)\cos(x) + \left(d_1\mathrm{e}^{2\pi} - (d_1 - 1)\mathrm{e}^{-2\pi}\right)\sin(x) &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir also zusätzlich die Bedingungen

$$c_1 = 0\ , \qquad d_1\mathrm{e}^{2\pi} - d_1\mathrm{e}^{-2\pi} + \mathrm{e}^{-2\pi} = 0 \ \text{ und daher } \ d_1 = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}}\ .$$

(c) Wir werten nun den nach (b) verbleibenden Ansatz für $u(x, y)$ in $x = 0$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich mit der Randbedingung $u(0, y) = 0$ durch.

$$u(0,y) = b_{-1}\sin(-y) + b_1\sin(y) \stackrel{!}{=} 0$$

Hieraus erhalten wir also zusätzlich die Bedingung

$$b_1 = b_{-1}\ .$$

Wir werten den verbleibenden Ansatz für $u(x, y)$ in $x = 2\pi$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich mit der Randbedingung $u(2\pi, y) = 0$ durch.

$$u(2\pi,y) = b_1\mathrm{e}^{-2\pi}\sin(-y) + b_1\mathrm{e}^{2\pi}\sin(y) \stackrel{!}{=} 0$$

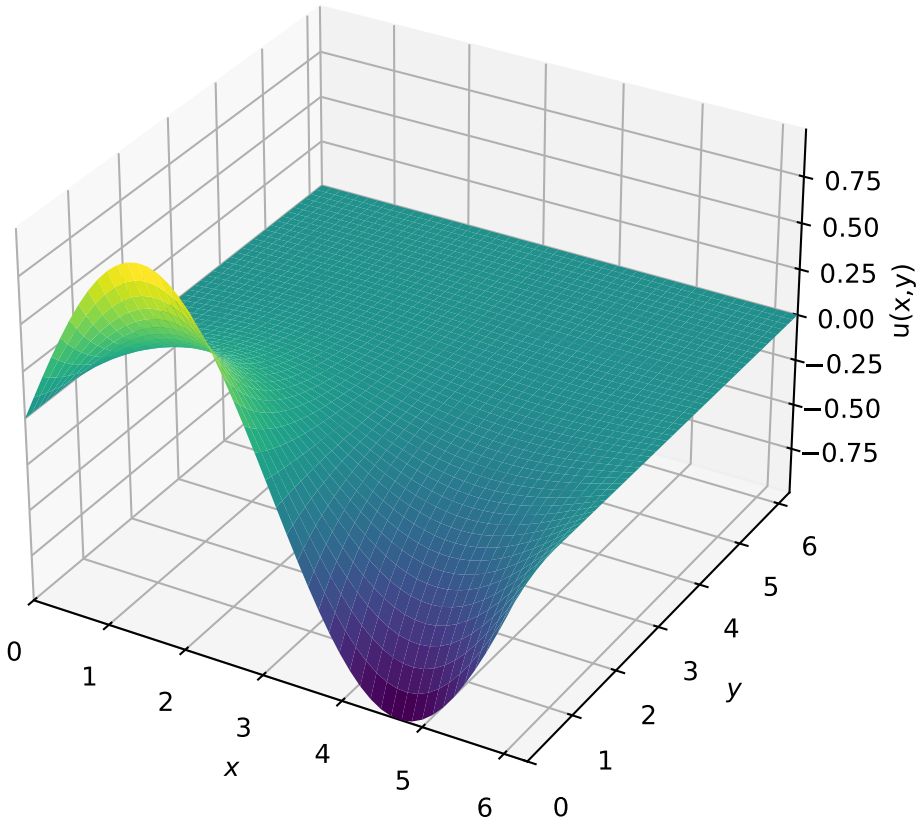
Hieraus erhalten wir also zusätzlich die Bedingung

$$b_1\left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) = 0\ ,\ \text{d.h. } b_1 = 0\ .$$

(d) Insgesamt erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 = a_{-1} = b_1 = b_{-1} = c_1 = c_{-1} \\ d_1 &= \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} \\ d_{-1} &= d_1 - 1 = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} \ . \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} \sin(-x)\mathrm{e}^{-y} + \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{-2\pi} - \mathrm{e}^{2\pi}} \sin(x)\mathrm{e}^{y} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} \sin(x)\mathrm{e}^{-y} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} \sin(x)\mathrm{e}^{y} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{4\pi}}{\mathrm{e}^{4\pi} - 1} \sin(x)\mathrm{e}^{-y} - \frac{1}{\mathrm{e}^{4\pi} - 1} \sin(x)\mathrm{e}^{y} \ . \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion ist unten dargestellt (nicht verlangt).