Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 1

Hausaufgabe 1

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+s^2) \\ \arctan(s) \\ s-\arctan(s) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises.

Lösung.

(a) Es wird

$$C'(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+s^2}\cdot 2s \\ \frac{1}{1+s^2} \\ 1-\frac{1}{1+s^2} \end{pmatrix}$$

und also

$$\begin{aligned} |C'(s)|^2 &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{1+s^2}\cdot 2s)^2 + (\tfrac{1}{1+s^2})^2 + (1-\tfrac{1}{1+s^2})^2 \\ &= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}((\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2s)^2 + 1^2 + ((1+s^2)-1)^2) \\ &= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}(2s^2+1+s^4) \\ &= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}(s^2+1)^2 \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Folglich ist auch stets $|C'(s)| = 1$.

Damit ist C eine normierte Parametrisierung der Kurve $C(\mathbb{R})$.

(b) Der Tangentenvektor ist

$$v(s) \;=\; C'(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+s^2}\cdot 2s \\ \frac{1}{1+s^2} \\ 1-\frac{1}{1+s^2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}s}{1+s^2} \\ \frac{1}{1+s^2} \\ 1-\frac{1}{1+s^2} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} s\sqrt{2} \\ 1 \\ s^2 \end{pmatrix}\,.$$

Es wird

$$C''(s) \;=\; -\frac{1}{(1+s^2)^2}\cdot 2s\begin{pmatrix} \sqrt{2}s \\ 1 \\ s^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2s \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{(1+s^2)^2}\left(\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}s^2 \\ -2s \\ -2s^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+s^2) \\ 0 \\ 2s(1+s^2) \end{pmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{(1+s^2)^2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(1-s^2) \\ -2s \\ 2s \end{pmatrix}\,.$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
|C''(s)| &= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}\left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}(1-s^2) \\ -2s \\ 2s \end{pmatrix}\right| \\
&= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}\sqrt{(\sqrt{2}(1-s^2))^2+(-2s)^2+(2s)^2} \\
&= \tfrac{1}{(1+s^2)^2}\sqrt{2(1-s^2)^2+8s^2} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{(1+s^2)^2}\sqrt{(1-s^2)^2+4s^2} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{(1+s^2)^2}\sqrt{1+2s^2+s^4} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{(1+s^2)^2}\sqrt{(s^2+1)^2} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{1+s^2}\,.
\end{aligned}
$$

Somit wird der Normalenvektor

$$
n(s) \;=\; \tfrac{1}{|C''(s)|}\cdot C''(s) \;=\; \tfrac{1+s^2}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{(1+s^2)^2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(1-s^2) \\ -2s \\ 2s \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1-s^2 \\ -\sqrt{2}s \\ \sqrt{2}s \end{pmatrix}\,.
$$

(c) Aus (b) erhalten wir die Krümmung

$$
\kappa(s) \;=\; |C''(s)| \;=\; \frac{\sqrt{2}}{1+s^2}\,.
$$

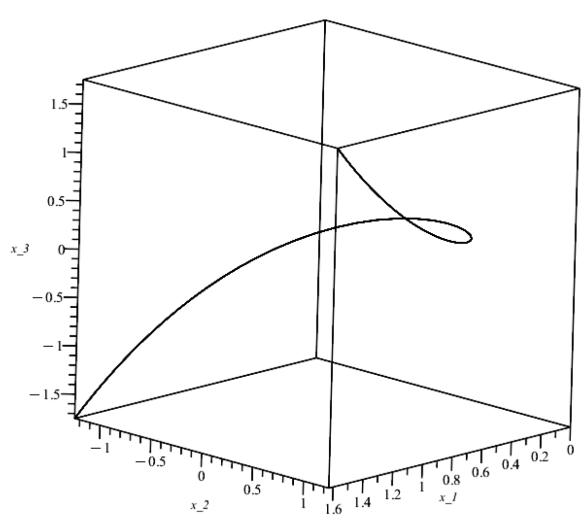
Somit wird der Krümmungskreisradius

$$
\rho(s) \;=\; \frac{1}{\kappa(s)} \;=\; \frac{1+s^2}{\sqrt{2}}\,.
$$

(d) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist

$$
M(s) \;=\; C(s)+\rho(s)\cdot n(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+s^2) \\ \arctan(s) \\ s-\arctan(s) \end{pmatrix} + \tfrac{1+s^2}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1-s^2 \\ -\sqrt{2}s \\ \sqrt{2}s \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(1+s^2)+1-s^2) \\ \arctan(s)-s \\ 2s-\arctan(s) \end{pmatrix}\,.
$$

Die Kurve graphisch dargestellt (nicht verlangt):



Hausaufgabe 2

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-s/2} \\ 2\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Skizzieren Sie die Kurve in der x_1-x_2-Ebene für $s \in [0, 2]$.
Verwenden Sie hierzu $C(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C(0{,}5) \approx \left(\begin{smallmatrix} 1{,}56 \\ -0{,}22 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C(1) \approx \left(\begin{smallmatrix} 1{,}21 \\ -0{,}58 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C(1{,}5) \approx \left(\begin{smallmatrix} 0{,}94 \\ -1{,}00 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C(2) \approx \left(\begin{smallmatrix} 0{,}73 \\ -1{,}45 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Radius $\rho(s)$ des Krümmungskreises.

Lösung.
(a) Es ist

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-s/2} \\ 2\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}+\ln(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})-\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit der Nebenrechnung

$$(1-\sqrt{a})^{-1} + (1+\sqrt{a})^{-1} \;=\; \frac{(1+\sqrt{a}) + (1-\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \;=\; \frac{2}{1-a}$$

für $a \in [0, 1)$ erhalten wir

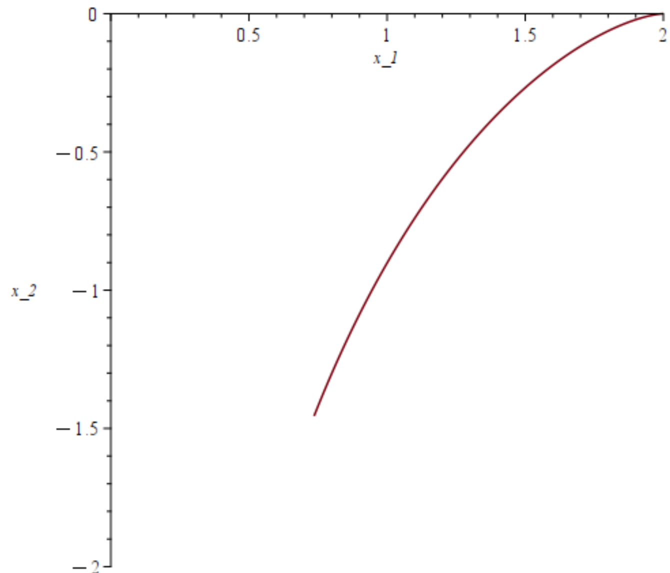
$$\begin{aligned} C'(s) \;&=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ (1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot \mathrm{e}^{-s}+(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})^{-1}\cdot(-\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2})\cdot \mathrm{e}^{-s}-(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})^{-1}\cdot\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot \mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ \mathrm{e}^{-s}(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}(1-(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})^{-1}\cdot\frac{1}{2}-(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})^{-1}\cdot\frac{1}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ \mathrm{e}^{-s}(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}(1-\frac{1}{1-(1-\mathrm{e}^{-s})}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ (1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}(\mathrm{e}^{-s}-1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}} \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Somit wird

$$|C'(s)| \;=\; \sqrt{(-\mathrm{e}^{-s/2})^2 + (-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}})^2} = \sqrt{\mathrm{e}^{-s} + 1 - \mathrm{e}^{-s}} \;=\; 1 .$$

Damit ist C eine normierte Parametrisierung der Kurve $C(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$.

(b) Die Kurve hat folgende Gestalt in der x_1-x_2-Ebene.



(c) In (a) haben wir bereits

$$v(s) \;=\; C(s) \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s/2} \\ -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnet.
Desweiteren wird

$$C''(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s/2} \\ -\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot\mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s/2} \\ -(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot\mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix}\;.$$

Damit ist

$$|C''(s)| \;=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{e}^{-s/2})^2 + (-(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot\mathrm{e}^{-s})^2} \;=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^{-s} + (1-\mathrm{e}^{-s})^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-2s}} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^s - 1}}\;.$$

Also ist

$$n(s) \;=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \sqrt{\mathrm{e}^s - 1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s/2} \\ -(1-\mathrm{e}^{-s})^{-1/2}\cdot\mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}} \\ -\mathrm{e}^{-s/2} \\ 0 \end{pmatrix}\;.$$

Probe (nicht verlangt): Es ist $\langle v(s)|n(s)\rangle = 0$.

(d) Mit (c) wird erhalten wir den Krümmungskreisradius $\rho(s) = \frac{1}{|C''(s)|} \;=\; 2\sqrt{\mathrm{e}^s - 1}$.