Künzer Wintersemester 2024/25

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 3

Hausaufgaben

Hausaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Lösung.
(a) Es wird

$$C'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad C''(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad C'''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \\ -8\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

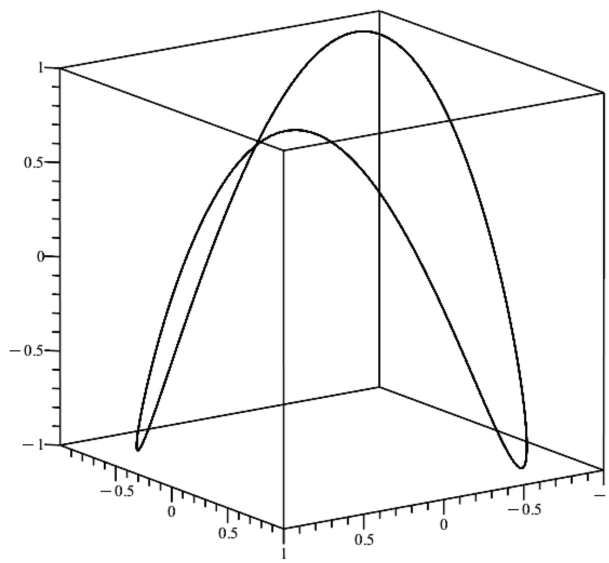
(b) Es wird, unter Verwendung der üblichen Abkürzungen, die Krümmung

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \tfrac{1}{|C'(t)|^3} |C'(t) \times C''(t)| \\
&= \tfrac{1}{(\cos(t)^2 + (-\sin(t))^2 + (2\cos(2t))^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix} \right| \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 4\mathrm{s}_t \mathrm{s}_{2t} + 2\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{c}_{2t} \\ -2\,\mathrm{c}_{2t}\,\mathrm{s}_t + 4\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{s}_{2t} \\ -1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} ((4\mathrm{s}_t \mathrm{s}_{2t} + 2\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{c}_{2t})^2 + (-2\,\mathrm{c}_{2t}\,\mathrm{s}_t + 4\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{s}_{2t})^2 + 1)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} (16\mathrm{s}_t^2 \mathrm{s}_{2t}^2 + 16\mathrm{s}_t \mathrm{s}_{2t}\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{c}_{2t} + 4\,\mathrm{c}_t^2\,\mathrm{c}_{2t}^2 + 4\,\mathrm{c}_{2t}^2\,\mathrm{s}_t^2 - 16\,\mathrm{c}_{2t}\,\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{s}_{2t} + 16\,\mathrm{c}_t^2\,\mathrm{s}_{2t}^2 + 1)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} (16\mathrm{s}_t^2 \mathrm{s}_{2t}^2 + 4\,\mathrm{c}_t^2\,\mathrm{c}_{2t}^2 + 4\,\mathrm{c}_{2t}^2\,\mathrm{s}_t^2 + 16\,\mathrm{c}_t^2\,\mathrm{s}_{2t}^2 + 1)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} (16\mathrm{s}_{2t}^2 + 4\,\mathrm{c}_{2t}^2 + 1)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{(1+4\,\mathrm{c}_{2t}^2)^{3/2}} (16 - 16\,\mathrm{c}_{2t}^2 + 4\,\mathrm{c}_{2t}^2 + 1)^{1/2} \\
&= \frac{(17 - 12\cos(2t)^2)^{1/2}}{(1 + 4\cos(2t)^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

(c) Der Rechnung aus (b) können wir entnehmen: $|C'(t) \times C''(t)|^2 = 17 - 12\,\mathrm{c}_{2t}^2$.

Also wird, unter Verwendung der üblichen Abkürzungen, die Torsion

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|^2}\,\det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \\
&= \tfrac{1}{17-12\,\mathrm{c}_{2t}^2}\,\det\begin{pmatrix} \mathrm{c}_t & -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t & \mathrm{s}_t \\ 2\,\mathrm{c}_{2t} & -4\mathrm{s}_{2t} & -8\,\mathrm{c}_{2t} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{17-12\,\mathrm{c}_{2t}^2}\,\det\begin{pmatrix} \mathrm{c}_t & -\mathrm{s}_t & 0 \\ -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t & 0 \\ 2\,\mathrm{c}_{2t} & -4\mathrm{s}_{2t} & -6\,\mathrm{c}_{2t} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{17-12\,\mathrm{c}_{2t}^2}(-\mathrm{c}_t^2 - \mathrm{s}_t^2)(-6\,\mathrm{c}_{2t}) \\
&= \frac{6\cos(2t)}{17-12\cos(2t)^2}\ .
\end{aligned}$$



Hausaufgabe 6 Wir betrachten die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ uv \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Diese beschreibt den Graphen der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

(a) Bestimmen Sie E, F und G.

(b) Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right)$, wobei $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $C := \Phi \circ c$.

Verwenden Sie (a), um die Länge der Kurve $C([0,1])$ zu bestimmen. Das resultierende Integral über t braucht dabei nicht ausgewertet zu werden.

Lösung.
(a) Es ist $\Phi_u = \Phi_u(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_v = \Phi_v(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{smallmatrix}\right)$. Damit wird

$$\begin{array}{rcccccl} E & = & \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{smallmatrix}\right) \,|\, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{smallmatrix}\right) \rangle & = & 1 + v^2 \\ F & = & \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{smallmatrix}\right) \,|\, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{smallmatrix}\right) \rangle & = & uv \\ G & = & \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{smallmatrix}\right) \,|\, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{smallmatrix}\right) \rangle & = & 1 + u^2 \;. \end{array}$$

(b) Die Länge der Kurve $C([0,1])$ ist, unter Verwendung von $E = E(c(t)) = E(t,t) = 1 + t^2$, $F = F(c(t)) = F(t,t) = t^2$ und $G = G(c(t)) = G(t,t) = 1 + t^2$,

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 \left(c'^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'\right)^{1/2} \mathrm{d}t & = & \int_0^1 \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1+t^2 & t^2 \\ t^2 & 1+t^2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)^{1/2} \mathrm{d}t \\ & = & \int_0^1 \sqrt{2 + 4t^2}\, \mathrm{d}t \;. \end{array}$$

Auswertung des Integrals (nicht verlangt):
Substitution $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(u)$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(u)\, \mathrm{d}u$ gibt

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 \sqrt{2 + 4t^2}\, \mathrm{d}t & = & \int_0^{\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})} \sqrt{2 + 2\sinh(u)^2}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(u)\, \mathrm{d}u \\ & = & \int_0^{\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})} \cosh(u)^2\, \mathrm{d}u \\ & = & \int_0^{\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})} \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2u} + 2 + \mathrm{e}^{-2u})\, \mathrm{d}u \\ & = & [\frac{1}{4}\sinh(2u) + \frac{u}{2}]_0^{\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})} \\ & = & \frac{1}{4}\sinh(2\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})) + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\sqrt{2}) \;. \end{array}$$

Graphik (nicht verlangt). In schwarz die Kurve auf der von Φ parametrisierten Fläche: