Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 4

Hausaufgaben

Hausaufgabe 7 Wir betrachten den Zylinder $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4 \}$, parametrisiert durch

$$\Phi \ : \ \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \ \mapsto \ \Phi(z, \varphi) \ = \ \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} .$$

(a) Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
Sei $d(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
Bestimmen Sie $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.

(b) Bestimmen Sie E, F und G.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung von $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.

Lösung.

(a) Es ist $C(t) = \Phi(c(t)) = \Phi(t, 2t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$.

Es ist $D(t) = \Phi(d(t)) = \Phi(1, t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es sollte $c(t_1) = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \end{pmatrix} = d(t_2)$ sein. Gemäß erstem Eintrag ist $t_1 = 1$, gemäß zweitem Eintrag dann $t_2 = 2$.

(b) Es ist $\Phi_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es folgt

$$E \ = \ E(z, \varphi) \ = \ \langle \Phi_z | \Phi_z \rangle \ = \ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ = \ 1$$

$$F \ = \ F(z, \varphi) \ = \ \langle \Phi_z | \Phi_\varphi \rangle \ = \ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ = \ 0$$

$$G \ = \ G(z, \varphi) \ = \ \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle \ = \ \langle \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ = \ 4 \, .$$

(c) Sei α der Winkel, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.

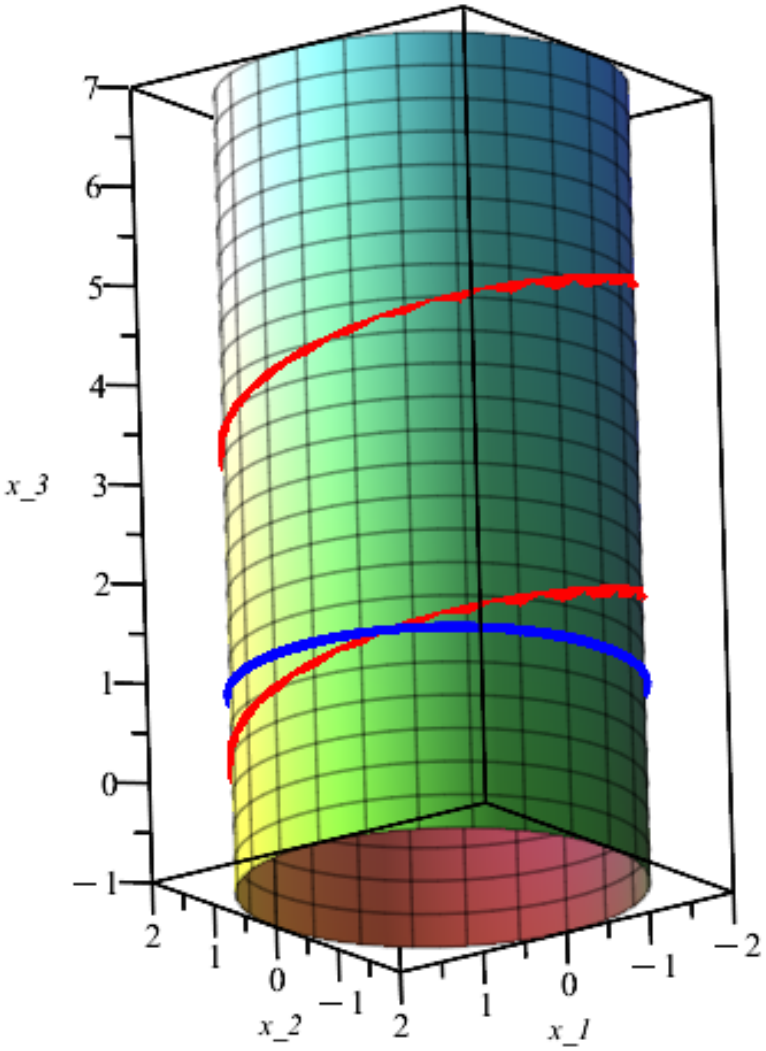
Es ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also auch $c'(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es ist $d'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also auch $d'(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit wird

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \ &= \ \frac{c'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_2)}{\sqrt{c'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'(t_1)} \cdot \sqrt{d'(t_2)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_2)}} \\ &= \ \frac{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} \cdot \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}} \\ &= \ \frac{8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{4}} \ = \ \frac{4}{\sqrt{17}} \, . \end{aligned}$$

Graphik zur Illustration (nicht verlangt):



Die von C parametrisierte Kurve ist rot, die von D parametrisierte blau dargestellt.

Es ergibt sich der Schnittwinkel der (Tangenten an die) Kurven im Schnittpunkt mit obiger Rechnung zu $\alpha \approx 14{,}04°$.

Hausaufgabe 8

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$, wobei $u, v \in \mathbb{R}$.
Vgl. Hausaufgabe 6.

Man skizziere die Schnitte der parametrisierten Fläche mit den Koordinatenebenen und mit den Ebenen $x_1 = x_2$ und $x_1 = -x_2$ in ein Koordinatensystem.

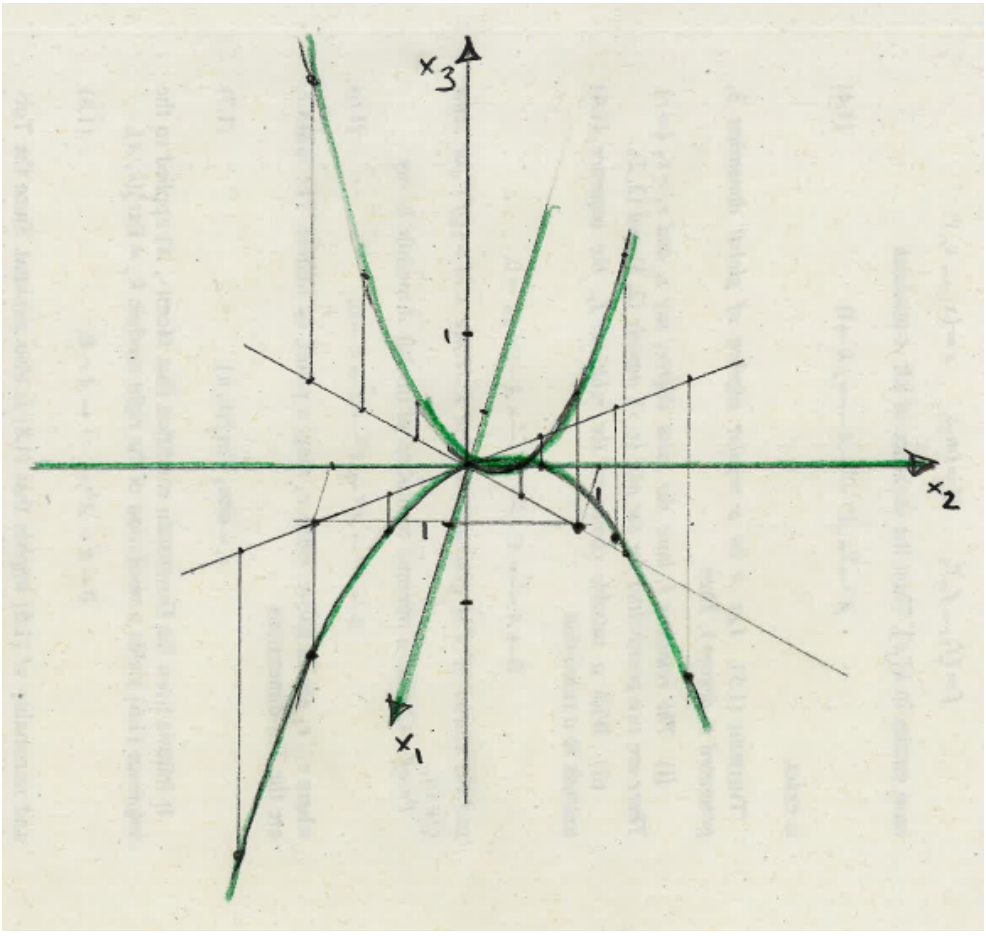
Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert?

(b) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für $i, j, k \in \{1, 2\}$ mittels E, F und G.

(c) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.

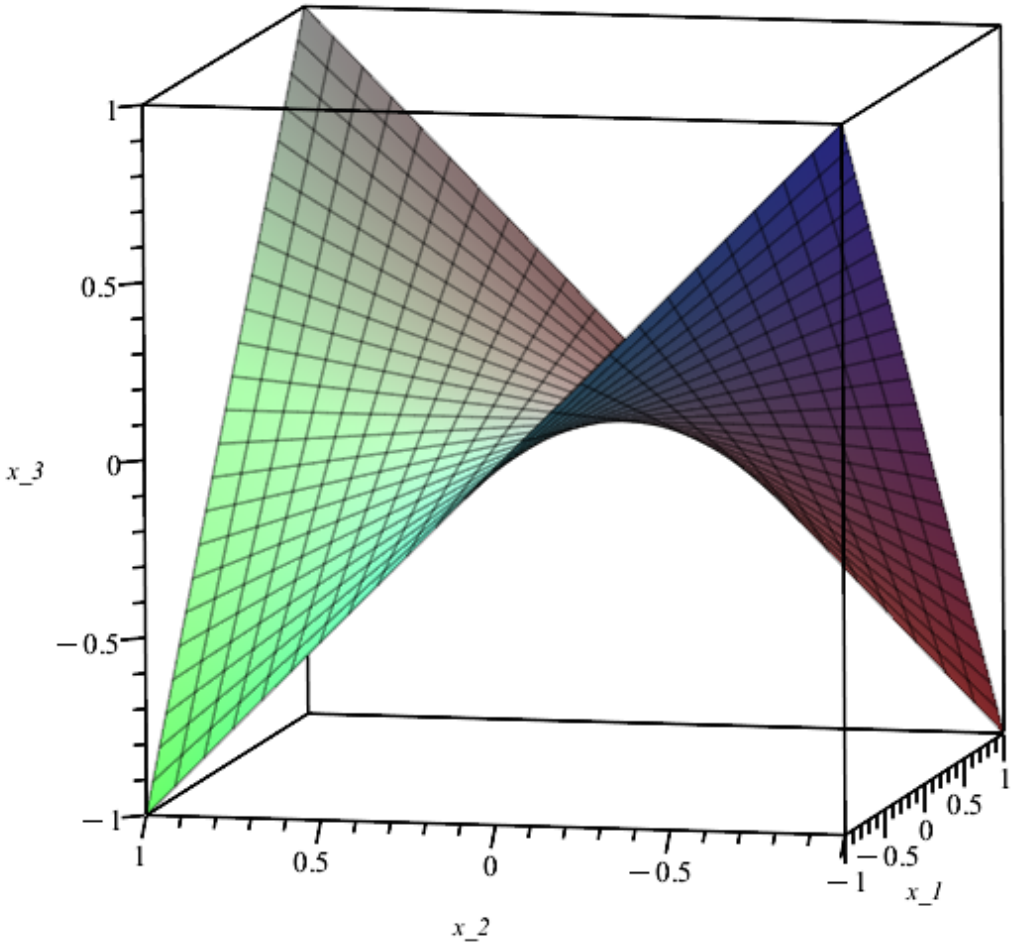
Lösung.

(a) Skizze der gefragten Schnitte:



Die von Φ parametrisierte Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



(b) Aus Hausaufgabe 6 entnehmen wir: $E = 1 + v^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$.

Es ist $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$ und also $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u-u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(c) Es ist $\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$, $\Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$.

Es ist $\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$.

Unter Verwendung von $\Gamma_{11}^1 = 0$ und $\Gamma_{11}^2 = 0$ wird tatsächlich

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} + h_{11} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllbar mit $h_{11} = 0$.

Unter Verwendung von $\Gamma_{12}^1 = \frac{v}{1+u^2+v^2}$ und $\Gamma_{12}^2 = \frac{u}{1+u^2+v^2}$ wird tatsächlich

$$\Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{v}{1+u^2+v^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{u}{1+u^2+v^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} + h_{12} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllbar mit $h_{12} = \frac{1}{1+u^2+v^2}$.

Unter Verwendung von $\Gamma_{22}^1 = 0$ und $\Gamma_{22}^2 = 0$ wird tatsächlich

$$\Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} + h_{22} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllbar mit $h_{22} = 0$.