Differentialgeometrie für Geodäten

# Lösung 5

## Hausaufgaben

**Hausaufgabe 9** Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche $S$, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Sei $c(t) = \binom{t}{t}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf $S$?

(b) Sei $d(t) = \binom{t}{t^2}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(d(t))$ eine Geodäte auf $S$?

*Lösung.*

Aus Hausaufgabe 6 entnehmen wir: Es ist $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$.
Somit ist $\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 2u \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v & u \\ u & 0 \end{pmatrix}$.

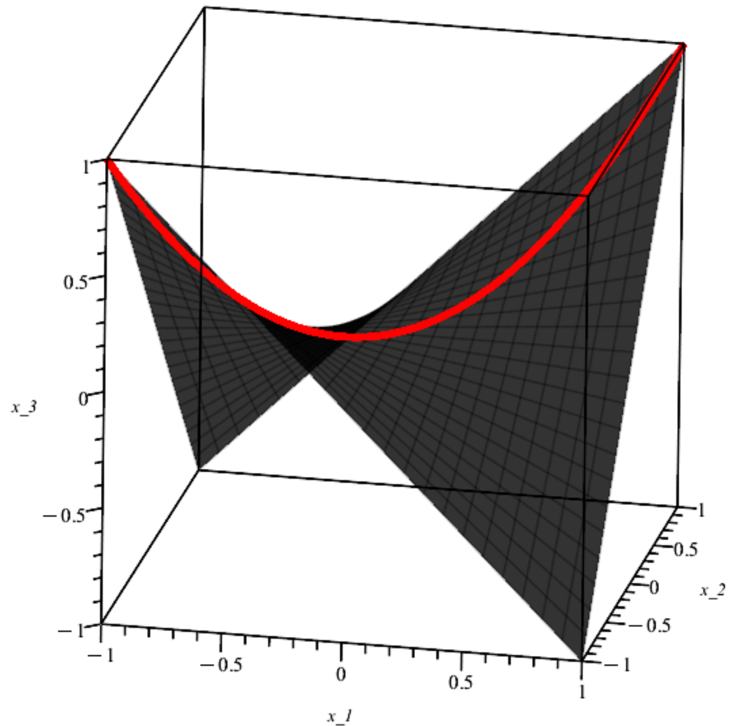
Aus Hausaufgabe 8 entnehmen wir: Es ist $\Gamma^1 = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix}$ und $\Gamma^2 = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Es ist $c' = \binom{1}{1}$ und $c'' = \binom{0}{0}$.
Nebenrechnungen bei $\binom{u}{v} = c(t) = \binom{t}{t}$:
Es ist $c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' = \frac{1}{1+2t^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \binom{1}{1} = \frac{2t}{1+2t^2}$.
Es ist $c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' = \frac{1}{1+2t^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \binom{1}{1} = \frac{2t}{1+2t^2}$.
Es ist $c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t^2 & t^2 \\ t^2 & 1+t^2 \end{pmatrix} \binom{1}{1} = 2 + 4t^2$.
Es ist $\frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 2t \end{pmatrix} \binom{1}{1} \cdot 1 = 2t$.
Es ist $\frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \binom{1}{1} \cdot 1 = 2t$.
Also wird

$$\begin{aligned} & c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left( c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c'_1 + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\ = & \binom{0}{0} + \frac{1}{1+2t^2} \binom{2t}{2t} - \frac{1}{2+4t^2} (0 + 2t + 2t) \binom{1}{1} \\ = & \binom{0}{0} \; . \end{aligned}$$

Also parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf $S$.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):




(b) Es ist $d' = \binom{1}{2t}$ und $d'' = \binom{0}{2}$.

Nebenrechnungen bei $\binom{u}{v} = d(t) = \binom{t}{t^2}$:

Es ist $d'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 d' = \frac{1}{1+t^2+t^4}\begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & t^2\\ t^2 & 0\end{pmatrix}\binom{1}{2t} = \frac{4t^3}{1+t^2+t^4}$.

Es ist $d'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 d' = \frac{1}{1+t^2+t^4}\begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & t\\ t & 0\end{pmatrix}\binom{1}{2t} = \frac{4t^2}{1+t^2+t^4}$.

Es ist $d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d' = \begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+t^4 & t^3\\ t^3 & 1+t^2\end{pmatrix}\binom{1}{2t} = (1+t^4) + 2\cdot 2t\cdot t^3 + 4t^2\cdot(1+t^2) = 1+4t^2+9t^4$.

Es ist $d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d'' = \begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+t^4 & t^3\\ t^3 & 1+t^2\end{pmatrix}\binom{0}{2} = 2t^3 + 4t + 4t^3 = 4t + 6t^3$.

Es ist $\frac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{pmatrix} d' \cdot d'_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & t^2\\ t^2 & 2t\end{pmatrix}\binom{1}{2t}\cdot 1 = 6t^3$.

Es ist $\frac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{pmatrix} d' \cdot d'_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t^2 & t\\ t & 0\end{pmatrix}\binom{1}{2t}\cdot 2t = 6t^3$.

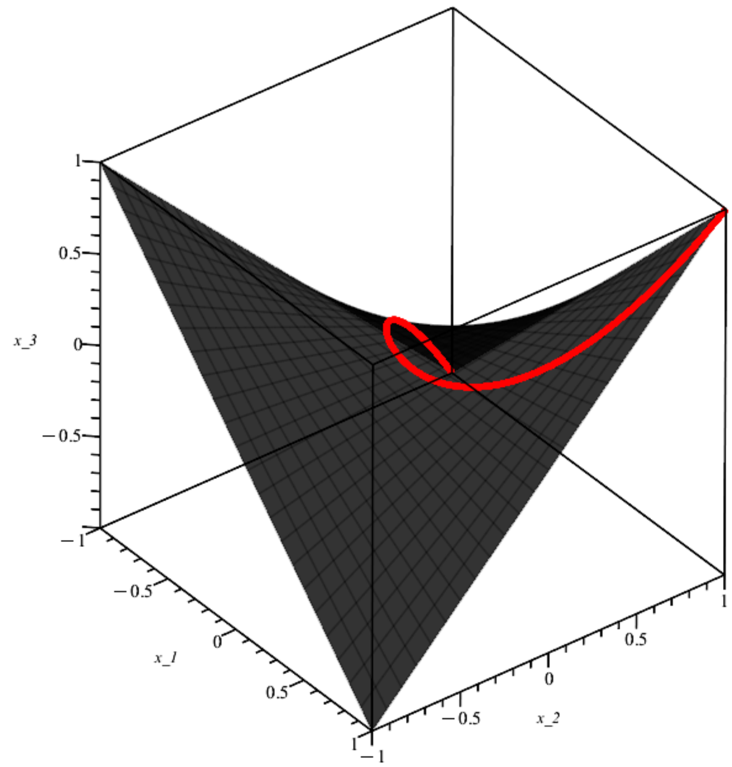
Also wird

$$\begin{aligned}
& d'' + \begin{pmatrix}d'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 d'\\ d'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 d'\end{pmatrix} - \frac{1}{d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d'}\left(d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d'' + \frac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{pmatrix} d'\cdot d'_1 + \frac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{pmatrix} d'\cdot d'_2\right)\cdot d' \\
= \; & \binom{0}{2} + \frac{4t^2}{1+t^2+t^4}\binom{t}{1} - \frac{1}{1+4t^2+9t^4}\left((4t+6t^3)+6t^3+6t^3\right)\binom{1}{1} \\
= \; & \binom{0}{2} + \frac{4t^2}{1+t^2+t^4}\binom{t}{1} - \frac{4t+18t^3}{1+4t^2+9t^4}\binom{1}{1}\ .
\end{aligned}$$

Zum Beispiel erhalten wir für $t = 0$ den Vektor $\binom{0}{2} \neq \binom{0}{0}$. Somit ist das Resultat nicht gleich $\binom{0}{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Also parametrisiert $\Phi(c(t))$ keine Geodäte auf $S$.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



**Hausaufgabe 10** Sei $a \in (0,1]$ ein Parameter. Wir betrachten die um den Faktor $a$ abgeplattete Kugel $S$, welche ein Ellipsoid ist und welche durch

$$\Phi \ : \ [0,\pi] \times [0,2\pi] \ \mapsto \ \mathbb{R}^3 \ : \ \binom{\vartheta}{\varphi} \mapsto \Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

parametrisiert wird. Es ist also $S := \Phi([0,\pi] \times [0,2\pi])$.

(a) Bestimmen Sie $E$, $F$ und $G$.

(b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole.

(c) Sei $c(t) = \binom{t}{0}$, wobei $t \in [0,\pi]$.
Anschaulich gesprochen parametrisiert $\Phi(c(t))$ einen "Längenhalbkreis" auf $S$.
Parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf $S$?

*Lösung.* Wir verwenden die Abkürzungen $\mathrm{s}_\varphi = \sin(\varphi)$ und $\mathrm{c}_\varphi = \cos(\varphi)$ etc.

(a) Es ist $\Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_\vartheta\,\mathrm{c}_\varphi \\ \mathrm{c}_\vartheta\,\mathrm{s}_\varphi \\ -a\mathrm{s}_\vartheta \end{pmatrix}$. Es ist $\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_\vartheta \mathrm{s}_\varphi \\ \mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $E = \langle \Phi_\vartheta | \Phi_\vartheta \rangle = \mathrm{c}_\vartheta^2 + a^2 \mathrm{s}_\vartheta^2 = 1 - (1-a^2)\mathrm{s}_\vartheta^2$.
Wir kürzen $b := 1 - a^2$ ab und haben damit $E = 1 - b\mathrm{s}_\vartheta^2$.
Es ist $F = \langle \Phi_\vartheta | \Phi_\varphi \rangle = 0$.
Es ist $G = \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle = \mathrm{s}_\vartheta^2$.

(b) Es ist $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b\mathrm{s}_\vartheta^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^2 \end{pmatrix}$. Es ist also $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^{-2} \end{pmatrix}$.
Ferner ist $\begin{pmatrix} E_\vartheta & F_\vartheta \\ F_\vartheta & G_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta & 0 \\ 0 & 2\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\vartheta \\ F_\vartheta - \frac{1}{2}E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{b\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta}{1-b\mathrm{s}_\vartheta^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\varphi \\ \frac{1}{2}G_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{c}_\vartheta}{\mathrm{s}_\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_\varphi - \frac{1}{2}G_\vartheta \\ \frac{1}{2}G_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta}{1-b\mathrm{s}_\vartheta^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit anderen Worten, es werden

$$\Gamma^1 = -\frac{\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta}{1-b\mathrm{s}_\vartheta^2} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\Gamma^2 = \frac{\mathrm{c}_\vartheta}{\mathrm{s}_\vartheta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

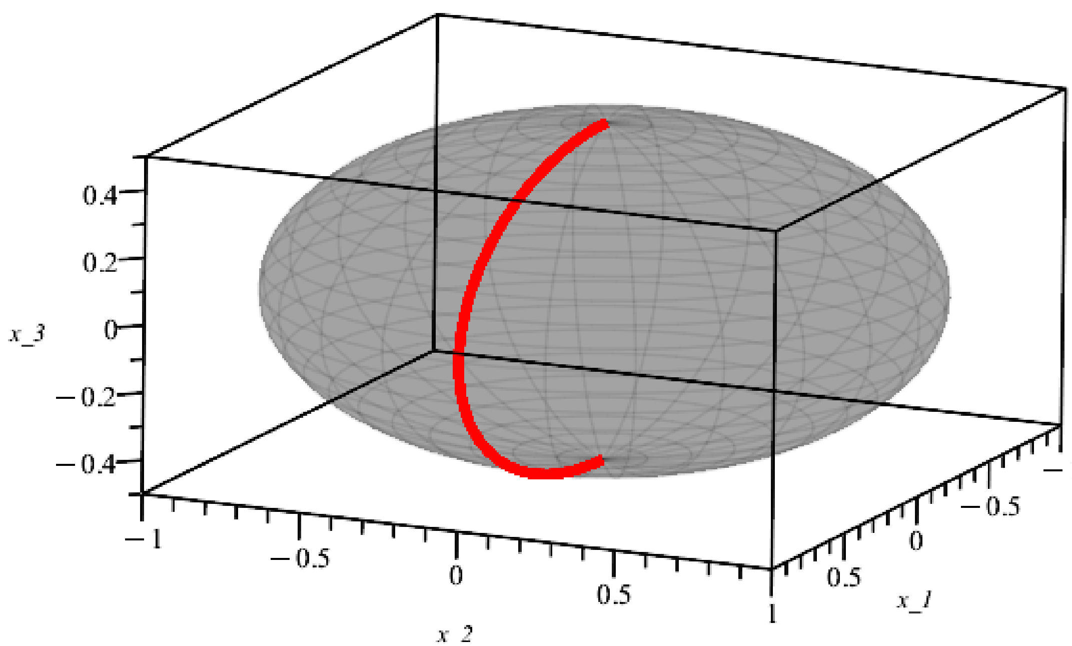
(c) Es ist $c' = \binom{1}{0}$. Es ist $c'' = \binom{0}{0}$.
Nebenrechnungen bei $\binom{\vartheta}{\varphi} = c(t) = \binom{t}{0}$:

Es ist $c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' = -\frac{\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t}{1-b\mathrm{s}_t^2}\left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}b&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = -\frac{b\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t}{1-b\mathrm{s}_t^2}$.
Es ist $c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' = \frac{\mathrm{c}_t}{\mathrm{s}_t}\left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0$.
Es ist $c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c' = \left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}1-b\mathrm{s}_t^2&0\\0&\mathrm{s}_t^2\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 1-b\mathrm{s}_t^2$.
Es ist $\frac{1}{2}\,c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E_\vartheta&F_\vartheta\\F_\vartheta&G_\vartheta\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_1' = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-2b\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t&0\\0&2\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = -b\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t$.
Also wird

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'}\left(c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'' + \frac{1}{2}\,c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E_\vartheta&F_\vartheta\\F_\vartheta&G_\vartheta\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_1' + \frac{1}{2}\,c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E_\varphi&F_\varphi\\F_\varphi&G_\varphi\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_2'\right)\cdot c' \\
= \; & \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) - \frac{b\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t}{1-b\mathrm{s}_t^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{1-b\mathrm{s}_t^2}(0-b\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t+0)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \\
= \; & \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\,.
\end{aligned}$$

Also parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf $S$.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):




Hier wurde $a = 0{,}5$ gesetzt.