Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 20.01.25 in den Gruppenübungen oder bis Mo 20.01.25, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 13

Sei, wie in den Platzaufgaben 12 und 14,

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} \;.$$

(a) Man gebe $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$ an.

(b) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.
An der Stelle $t \in \mathbb{R}$ bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa \cdot \cos(\nu) = \kappa(t) \cdot \cos(\nu(t))$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa = \kappa(t)$ für $C(t) := \Phi(c(t))$.
Man verwende dies und das Ergebnis aus (b), um $\cos(\nu(t))$ zu berechnen.

Lösung.

(a) Es ist $\Phi_u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{smallmatrix}\right)$. Folglich ist

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} \langle \Phi_u|\Phi_u\rangle & \langle \Phi_u|\Phi_v\rangle \\ \langle \Phi_v|\Phi_u\rangle & \langle \Phi_v|\Phi_v\rangle \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4v^2 \end{pmatrix} \;.$$

Es ist $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2v \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\Phi_{uu} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\Phi_{uv} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_{vv} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Somit wird

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} \langle \Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle \Phi_{uv}|\mathfrak{n}\rangle \\ \langle \Phi_{vu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle \Phi_{vv}|\mathfrak{n}\rangle \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{(1+4v^2)^{1/2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

(b) Es ist $\Phi(c(t)) = \Phi(t,t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$.
Es ist $c'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Es folgt, in Abhängigkeit von t,

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) c'}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'} \;=\; \frac{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \frac{1}{(1+4t^2)^{1/2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4t^2 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \;=\; \frac{\frac{2}{(1+4t^2)^{1/2}}}{2+4t^2} \;=\; \frac{1}{(1+2t^2)(1+4t^2)^{1/2}} \;.$$

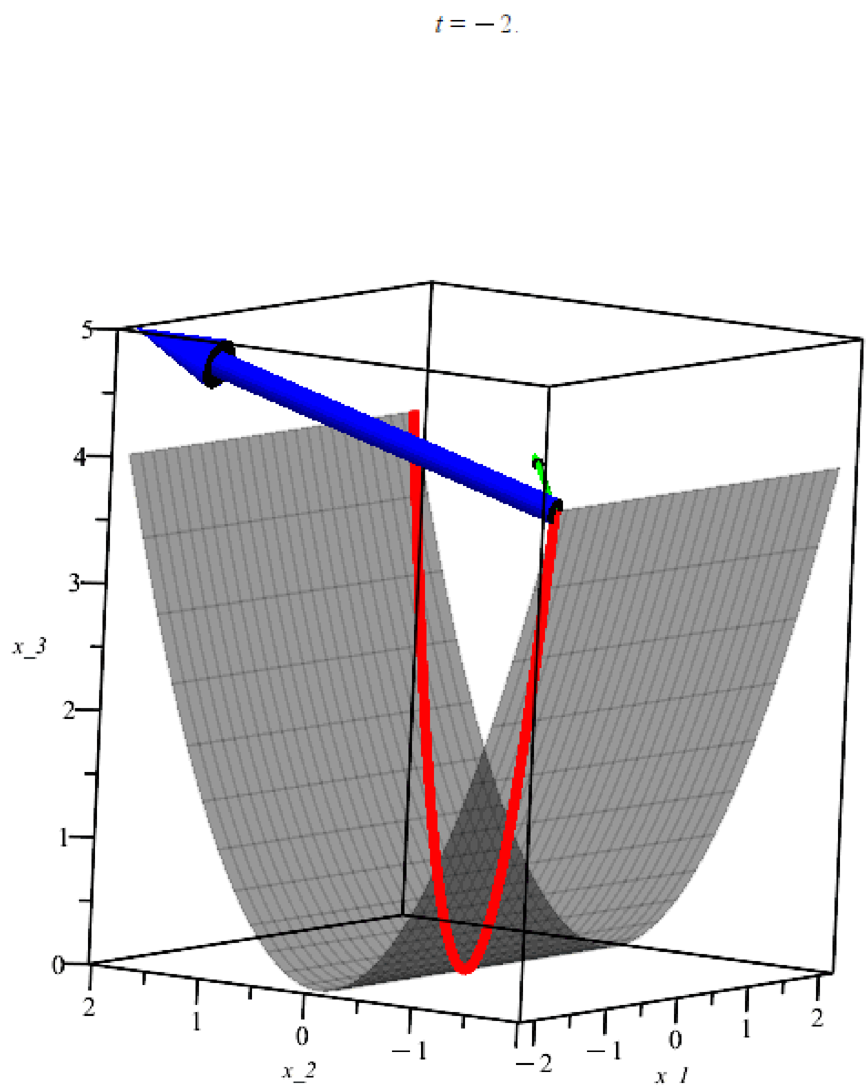
(c) Aus (b) entnehmen wir $C(t) = \Phi(c(t)) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$. Es wird $C'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$. Es wird $C''(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Mit §1.4 wird

$$\kappa \;=\; \kappa(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)|^3} |C'(t) \times C''(t)| \;=\; \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right| \;=\; \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right| \;=\; (1+2t^2)^{-3/2} \;.$$

Mit (b) erhalten wir also

$$\cos(\nu(t)) \;=\; \cos(\nu) \;=\; \frac{\kappa \cdot \cos(\nu)}{\kappa} \;=\; \frac{1}{(1+2t^2)(1+4t^2)^{1/2}}(1+2t^2)^{3/2} \;=\; \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+4t^2}}\,.$$

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



In rot die von $C(t) = \Phi(c(t))$ parametrisierte Kurve.
In blau der Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v$ senkrecht zur Fläche.
In grün der Vektor $n(t)$ in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts der Kurve.
Es ist ν der Winkel, der von diesen beiden Vektoren eingeschlossen wird.

Hausaufgabe 14 Sei $a \in (0,1)$ ein Parameter. Wir betrachten wieder die um den Faktor a abgeplattete Kugel S aus Hausaufgabe 10, welche ein Ellipsoid ist und welche durch

$$\Phi \;:\; [0,\pi]\times[0,2\pi] \;\mapsto\; \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix}\vartheta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\ a\cos(\vartheta)\end{pmatrix} .$$

parametrisiert wird. Es ist also $S := \Phi([0,\pi]\times[0,2\pi])$. Vgl. auch Hausaufgabe 12.

(a) Man gebe $\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)$ an.

(b) Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix}\pi/4\\ t\end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0,2\pi]$.

An der Stelle $t \in [0,2\pi]$ bestimme man $\Phi(c(t))$ und $\kappa\cdot\cos(\nu) = \kappa(t)\cdot\cos(\nu(t))$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa = \kappa(t)$ für $C(t) := \Phi(c(t))$.

Man verwende dies und das Ergebnis aus (b), um $\cos(\nu(t))$ zu berechnen.

Lösung.

(a) Sei $b := 1 - a^2$.

Aus Hausaufgabe 10 entnehmen wir $\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1-b\mathrm{s}_\vartheta^2 & 0\\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^2\end{smallmatrix}\right)$.

Aus Hausaufgabe 12 entnehmen wir $\left(\begin{smallmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{smallmatrix}\right) = \frac{-a}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)\mathrm{s}_\vartheta}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^2\end{smallmatrix}\right)$.

Also wird

$$\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right) \;=\; \sqrt{EG-F^2}\left(\begin{smallmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{smallmatrix}\right) \;=\; (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\cdot\mathrm{s}_\vartheta\cdot\frac{-a}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)\mathrm{s}_\vartheta}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^2\end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{-a}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{s}_\vartheta^2\end{smallmatrix}\right) .$$

(b) Da $c(t) = \left(\begin{smallmatrix}\pi/4\\ t\end{smallmatrix}\right)$, ist $\vartheta = \pi/4$ und $\varphi = t$. Es ist $c'(t) = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $\Phi(c(t)) = \Phi(\frac{\pi}{4}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{c}_t\\ \mathrm{s}_t\\ a\end{smallmatrix}\right)$.

Es folgt, in Abhängigkeit von t,

$$\kappa\cdot\cos(\nu) \;=\; \frac{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)c'}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)c'} \;=\; \frac{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right)\frac{-a}{(1-b/2)^{1/2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right)}{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1-b/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right)} \;=\; \frac{-a}{(1-b/2)^{1/2}} \;=\; \frac{-a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{1/2}} .$$

(c) Aus (b) entnehmen wir $C(t) = \Phi(c(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{c}_t\\ \mathrm{s}_t\\ a\end{smallmatrix}\right)$.

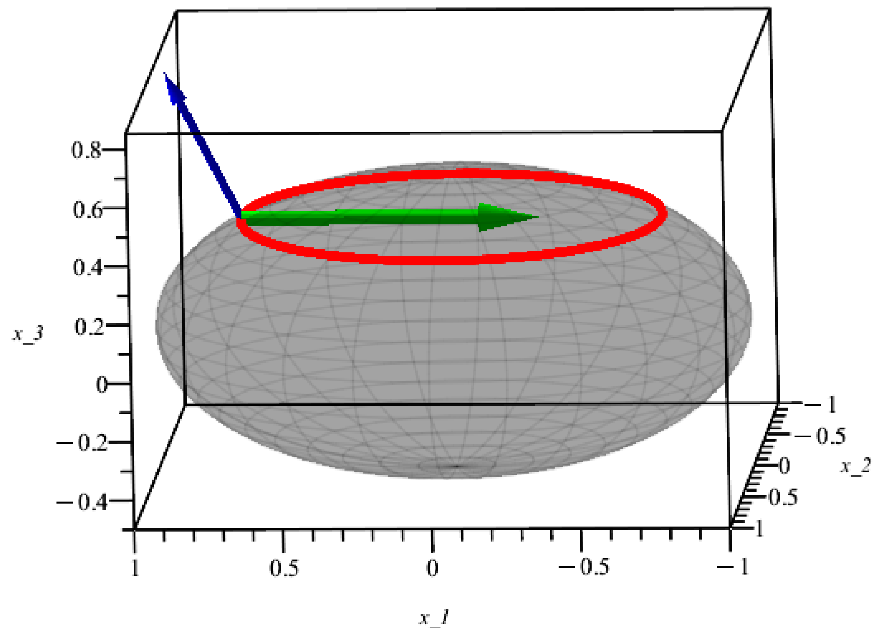
Es wird $C'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{s}_t\\ \mathrm{c}_t\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Es wird $C''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{c}_t\\ -\mathrm{s}_t\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Mit §1.4 wird

$$\kappa \;=\; \kappa(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)|^3}|C'(t)\times C''(t)| \;=\; \frac{1}{(1/\sqrt{2})^3}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{s}_t\\ \mathrm{c}_t\\ 0\end{smallmatrix}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{c}_t\\ -\mathrm{s}_t\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right| \;=\; \sqrt{2}\left|\left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ -1\end{smallmatrix}\right)\right| \;=\; \sqrt{2} .$$

Mit (b) erhalten wir also

$$\cos(\nu(t)) \;=\; \cos(\nu) \;=\; \frac{\kappa\cdot\cos(\nu)}{\kappa} \;=\; \frac{-a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{-a}{(1+a^2)^{1/2}} .$$

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



Es ist $a = 0{,}5$.
In rot die von $C(t) = \Phi(c(t))$ parametrisierte Kurve.
In blau der Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v$ senkrecht zur Fläche.
In grün der Vektor $n(t)$ in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts der Kurve.
Es ist ν der Winkel, der von diesen beiden Vektoren eingeschlossen wird.