

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 8

Hausaufgaben

Hausaufgabe 15

Sei, wie in Platzaufgaben 12, 14 und Hausaufgabe 13,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Man bestimme an jeder Stelle die Weingarten-Matrix W .
- (b) Man bestimme an jeder Stelle die Hauptkrümmungsvektoren, die Hauptkrümmungen und die mittlere Krümmung K_{mittel} .
- (c) An der Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parametrisiere man für jeden Hauptkrümmungsvektor jeweils einen zugehörigen Normalschnitt. Man bestimme die Hauptkrümmungen abermals, nun unter Verwendung dieser Normalschnitte.

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 13 entnehmen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4v^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+4v^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Weingarten-Matrix wird also

$$W = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+4v^2)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+4v^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{(1+4v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Hauptkrümmungsvektoren, also Eigenvektoren der Diagonalmatrix W , sind $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Hauptkrümmung zu $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also der zugehörige Eigenwert, ist $\lambda_1 = 0$.

Die Hauptkrümmung zu $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also der zugehörige Eigenwert, ist $\lambda_2 = \frac{2}{(1+4v^2)^{3/2}}$.

Es wird $K_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{(1+4v^2)^{3/2}}$.

(c) Sei nun die Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet. Dort ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 0$, sowie $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_2 = 2$.

1. Wir betrachten den Hauptkrümmungsvektor $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir schneiden die von Φ parametrisierte Fläche mit der Ebene $x_2 = 0$.

Die Schnittkurve parametrisieren wir wie folgt. Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1$, wie verlangt.

Es wird $C(t) = \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, was in der Tat in der Ebene $x_2 = 0$ liegt, wie verlangt.

Wir berechnen die Hauptkrümmung direkt, via $C(t)$. Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist $\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} |C''(t) \times C'''(t)| = 0$.

Für $t = 0$ ist $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die betrachtete Stelle.

Es ist $\kappa(0) = 0$. Es ist also auch $\kappa(0) \cdot \cos(\nu) = 0$, egal, wie $n(t)$ gerichtet ist - wofür man hier in der Ebene $x_2 = 0$ zwei Wahlmöglichkeiten hat, nämlich $n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\kappa(0) \cdot \cos(\nu) = 0 = \lambda_1$.

2. Wir betrachten den Hauptkrümmungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir schneiden die von Φ parametrisierte Fläche mit der Ebene $x_1 = 0$.

Die Schnittkurve parametrisieren wir wie folgt. Sei $c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1$, wie verlangt.

Es wird $C(t) = \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, was in der Tat in der Ebene $x_1 = 0$ liegt, wie verlangt.

Wir berechnen die Hauptkrümmung direkt, via $C(t)$. Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} |C''(t) \times C'''(t)| = \frac{1}{(1+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{(1+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Für $t = 0$ ist $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die betrachtete Stelle.

Es ist $\kappa(0) = 2$.

Es ist $\mathbf{n}(u, v) = \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist $\mathbf{n}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

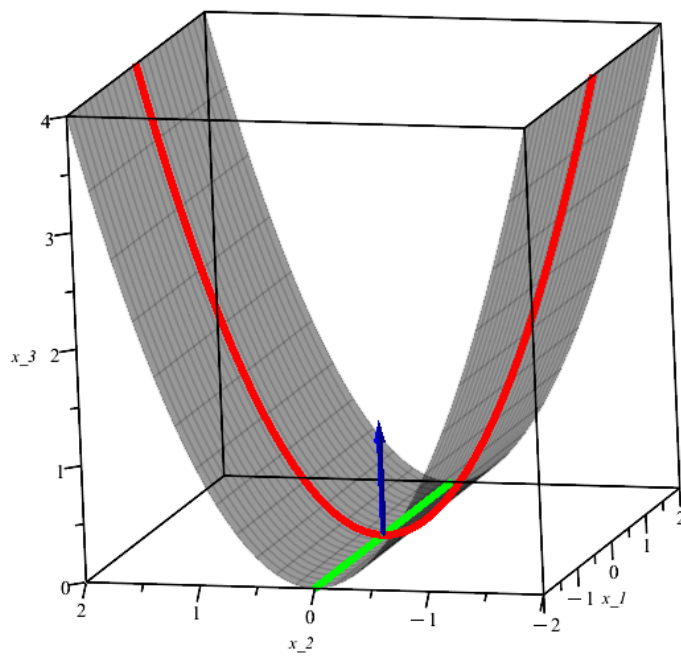
Es ist $n(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)| \cdot |C'(t)|} (\langle C'(t) | C''(t) \rangle C'''(t) - \langle C''(t) | C'''(t) \rangle C'(t))$. Also ist

$$\begin{aligned} n(0) &= \frac{1}{|C'(0) \times C''(0)| \cdot |C'(0)|} (\langle C'(0) | C''(0) \rangle C'''(0) - \langle C''(0) | C'''(0) \rangle C'(0)) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 1} (1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist der von $\mathbf{n}(0, 0)$ und $n(0)$ eingeschlossene Winkel gleich $\nu = 0$. Somit ist $\cos(\nu) = +1$.

Somit ist $\kappa(0) \cdot \cos(\nu) = 2 = \lambda_2$.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



In grün der Normalschnitt zu w_1 und $\lambda_1 = 0$. In rot der Normalschnitt zu w_2 und $\lambda_2 = 2$. In blau der Vektor $\mathbf{n}$ senkrecht zur Fläche.

Hausaufgabe 16 Sei, wie in Hausaufgaben 6, 8, 11,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix} .$$

- (a) Man bestimme an jeder Stelle die Weingarten-Matrix W .
- (b) Man bestimme an jeder Stelle die Hauptkrümmungsvektoren, die Hauptkrümmungen und die mittlere Krümmung K_{mittel} .
- (c) An der Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parametrisiere man für jeden Hauptkrümmungsvektor jeweils einen zugehörigen Normalschnitt. Man bestimme die Hauptkrümmungen abermals, nun unter Verwendung dieser Normalschnitte.

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 6 entnehmen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} .$$

Aus Hausaufgabe 11 entnehmen wir

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \sqrt{EG-F^2} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Weingarten-Matrix wird also

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten die Hilfsmatrix $A := \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -uv-\lambda & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 2\lambda uv + u^2 v^2) - (1+u^2+v^2+u^2 v^2) = \lambda^2 + 2\lambda uv - (1+u^2+v^2) .$$

Die Eigenwerte sind

$$\mu_1 = -uv + \sqrt{u^2 v^2 + 1 + u^2 + v^2} = -uv + \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}$$

und

$$\mu_2 = -uv - \sqrt{u^2 v^2 + 1 + u^2 + v^2} = -uv - \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)} .$$

Also sind die Hauptkrümmungen

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \mu_1 = \frac{-uv + \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \mu_2 = \frac{-uv - \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

Somit ist

$$K_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}.$$

Ein Eigenvektor zu λ_1 von W kann als Eigenvektor zu μ_1 von A berechnet werden. Nun ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -uv - \mu_1 & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv - \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)} & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)} \end{pmatrix}$$

nicht von vollem Rang. Die Zeilen sind also linear abhängig. Bei der Lösung des zugehörigen homogenen LGS kann also die zweite Zeile ignoriert werden. Die erste Zeile kann nach Division durch $\sqrt{1+u^2}$ noch umgeformt werden zu

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1+v^2} & \sqrt{1+u^2} \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen den Hauptkrümmungsvektor

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2} \\ \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zu λ_2 von W kann als Eigenvektor zu μ_2 von A berechnet werden. Nun ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -uv - \mu_2 & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv - \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)} & 1+u^2 \\ 1+v^2 & \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)} \end{pmatrix}$$

nicht von vollem Rang. Die Zeilen sind also linear abhängig. Bei der Lösung des zugehörigen homogenen LGS kann also die zweite Zeile ignoriert werden. Die erste Zeile kann nach Division durch $\sqrt{1+u^2}$ noch umgeformt werden zu

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+v^2} & \sqrt{1+u^2} \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen den Hauptkrümmungsvektor

$$w_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2} \\ -\sqrt{1+v^2} \end{pmatrix}.$$

(c) Sei nun die Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet.

Dort ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 1$, sowie $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_2 = -1$.

Es ist $\mathbf{n}(u, v) = \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist $\mathbf{n}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Wir betrachten den Hauptkrümmungsvektor $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir schneiden die von Φ parametrisierte Fläche mit der Ebene $x_1 = x_2$.

Die Schnittkurve parametrisieren wir wie folgt. Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1$, wie verlangt.

Es wird $C(t) = \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, was in der Tat in der Ebene $x_1 = x_2$ liegt, wie verlangt.

Wir berechnen die Hauptkrümmung direkt, via $C(t)$. Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} |C'(t) \times C''(t)| = \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{(1+2t^2)^{3/2}}.$$

Für $t = 0$ ist $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die betrachtete Stelle.

Es ist $\kappa(0) = 1$.

Es ist $n(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)| \cdot |C'(t)|} (\langle C'(t) | C'(t) \rangle C''(t) - \langle C'(t) | C''(t) \rangle C'(t))$. Also ist

$$\begin{aligned} n(0) &= \frac{1}{|C'(0) \times C''(0)| \cdot |C'(0)|} (\langle C'(0) | C'(0) \rangle C''(0) - \langle C'(0) | C''(0) \rangle C'(0)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} (2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist der von $\mathbf{n}(0,0)$ und $n(0)$ eingeschlossene Winkel gleich $\nu = 0$. Somit ist $\cos(\nu) = +1$. Somit ist $\kappa(0) \cdot \cos(\nu) = 1 = \lambda_1$.

2. Wir betrachten den Hauptkrümmungsvektor $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir schneiden die von Φ parametrisierte Fläche mit der Ebene $x_1 = -x_2$.

Die Schnittkurve parametrisieren wir wie folgt. Sei $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_1$, wie verlangt.

Es wird $C(t) = \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, was in der Tat in der Ebene $x_1 = -x_2$ liegt, wie verlangt.

Wir berechnen die Hauptkrümmung direkt, via $C(t)$. Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} |C'(t) \times C''(t)| = \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{(1+2t^2)^{3/2}}.$$

Für $t = 0$ ist $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die betrachtete Stelle.

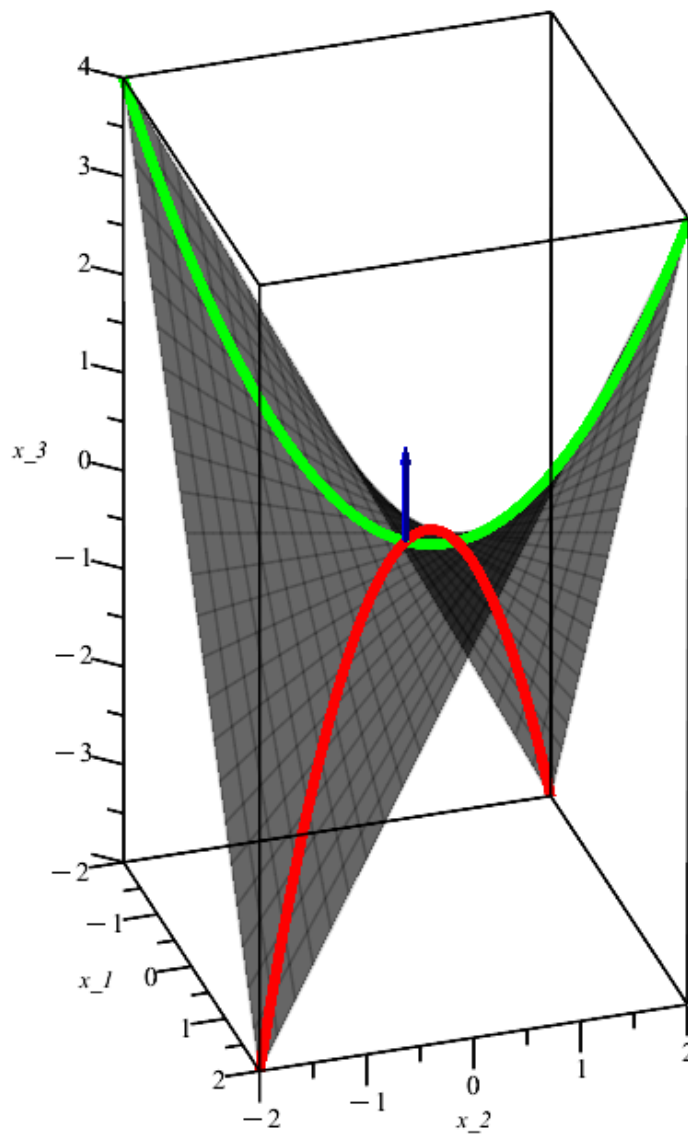
Es ist $\kappa(0) = 1$.

Es ist $n(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)| \cdot |C'(t)|} (\langle C'(t) | C'(t) \rangle C''(t) - \langle C'(t) | C''(t) \rangle C'(t))$. Also ist

$$\begin{aligned} n(0) &= \frac{1}{|C'(0) \times C''(0)| \cdot |C'(0)|} (\langle C'(0) | C'(0) \rangle C''(0) - \langle C'(0) | C''(0) \rangle C'(0)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} (2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist der von $\mathbf{n}(0,0)$ und $n(0)$ eingeschlossene Winkel gleich $\nu = \pi$. Somit ist $\cos(\nu) = -1$. Somit ist $\kappa(0) \cdot \cos(\nu) = -1 = \lambda_2$.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



In grün der Normalschnitt zu w_1 und $\lambda_1 = 1$. In rot der Normalschnitt zu w_2 und $\lambda_2 = -1$. In blau der Vektor $\mathbf{n}$ senkrecht zur Fläche.