

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 9

Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 Sei, wie in Hausaufgaben 6, 8, 11, 16,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix} .$$

- (a) Man bestimme die Gaußkrümmung $K_{\text{Gauß}}(u, v)$ unter Verwendung des Theorema egregium.
 (b) Man vergleiche mit dem Ergebnis aus Hausaufgabe 11.(b).

Lösung.

(a, b) Aus Hausaufgabe 6 entnehmen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} .$$

Damit ist auch $EG - F^2 = 1 + u^2 + v^2$.

Zunächst werden

$$\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 2u \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v & u \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

und also

$$\begin{pmatrix} E_{uu} & F_{uu} \\ F_{uu} & G_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} E_{uv} & F_{uv} \\ F_{uv} & G_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} E_{vv} & F_{vv} \\ F_{vv} & G_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das Theorema egregium gibt nun

$$\begin{aligned} K_{\text{Gauß}} &= \frac{1}{(EG-F^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} 1-1-1 & 0 & v-v \\ u-u & 1+v^2 & uv \\ 0 & uv & 1+u^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & v & u \\ v & 1+v^2 & uv \\ u & uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+v^2 & uv \\ 0 & uv & 1+u^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & v & u \\ v & 1+v^2 & uv \\ u & uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left(-(1+u^2+v^2) - \det \begin{pmatrix} 0 & v & u \\ v & 1 & 0 \\ u & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left(-(1+u^2+v^2) - \det \begin{pmatrix} -v^2-u^2 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ u & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} (-(1+u^2+v^2) + v^2 + u^2) \\ &= -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} . \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Hausaufgabe 11.(b) überein.

Hausaufgabe 18 Sei $a \in (0, 1)$ ein Parameter. Wir betrachten wieder die um den Faktor a abgeplattete Kugel S , welche ein Ellipsoid ist und welche durch

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ a \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

parametrisiert wird. Es ist also $S := \Phi([0, \pi] \times [0, 2\pi])$. Vgl. auch Hausaufgaben 10, 12, 14.

- (a) Man bestimme die Gaußkrümmung $K_{\text{Gauß}}(\vartheta, \varphi)$ unter Verwendung des Theorema egregium.
- (b) Man vergleiche mit dem Ergebnis aus Hausaufgabe 12.(b).

Lösung.

(a, b) Wir schreiben $b := 1 - a^2$. Aus Hausaufgabe 10 entnehmen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - bs_{\vartheta}^2 & 0 \\ 0 & s_{\vartheta}^2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $u = \vartheta$ und $v = \varphi$. Zunächst werden

$$\begin{pmatrix} E_{\varphi} & F_{\varphi} \\ F_{\varphi} & G_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_{\vartheta} & F_{\vartheta} \\ F_{\vartheta} & G_{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2bs_{\vartheta} c_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 2s_{\vartheta} c_{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bs_{2\vartheta} & 0 \\ 0 & s_{2\vartheta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_{\vartheta\vartheta} & F_{\vartheta\vartheta} \\ F_{\vartheta\vartheta} & G_{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2bc_{2\vartheta} & 0 \\ 0 & 2c_{2\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Das Theorema egregium gibt nun, mit $c_{2\vartheta} = c_{\vartheta}^2 - s_{\vartheta}^2 = 1 - 2s_{\vartheta}^2$ und $s_{2\vartheta}^2 = 4s_{\vartheta}^2 c_{\vartheta}^2 = 4s_{\vartheta}^2(1 - s_{\vartheta}^2)$,

$$\begin{aligned} K_{\text{Gauß}} &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} F_{\vartheta\varphi} - \frac{1}{2}G_{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{2}E_{\varphi\varphi} & \frac{1}{2}E_{\vartheta} & F_{\vartheta} - \frac{1}{2}E_{\varphi} \\ F_{\varphi} - \frac{1}{2}G_{\vartheta} & E & F \\ \frac{1}{2}G_{\varphi} & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_{\varphi} & \frac{1}{2}G_{\vartheta} \\ \frac{1}{2}E_{\varphi} & E & F \\ \frac{1}{2}G_{\vartheta} & F & G \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \cdot 2c_{2\vartheta} - 0 & \frac{1}{2}(-bs_{2\vartheta}) & 0 - 0 \\ 0 - \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & 1 - bs_{\vartheta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_{\vartheta}^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ 0 & 1 - bs_{\vartheta}^2 & 0 \\ \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & 0 & s_{\vartheta}^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} -c_{2\vartheta} & -\frac{1}{2}bs_{2\vartheta} & 0 \\ -\frac{1}{2}s_{2\vartheta} & 1 - bs_{\vartheta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_{\vartheta}^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ 0 & 1 - bs_{\vartheta}^2 & 0 \\ \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & 0 & s_{\vartheta}^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} \left(s_{\vartheta}^2(-c_{2\vartheta} + bs_{\vartheta}^2 c_{2\vartheta} - \frac{1}{4}bs_{2\vartheta}^2) - (-\frac{1}{4}s_{2\vartheta}^2 + \frac{1}{4}s_{2\vartheta}^2 bs_{\vartheta}^2) \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} \left(s_{\vartheta}^2(-c_{2\vartheta} + bs_{\vartheta}^2 c_{2\vartheta} - \frac{1}{4}bs_{2\vartheta}^2) - (-\frac{1}{4}s_{2\vartheta}^2 + \frac{1}{4}s_{2\vartheta}^2 bs_{\vartheta}^2) \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} \left(s_{\vartheta}^2(-1 + 2s_{\vartheta}^2 + bs_{\vartheta}^2 - 2bs_{\vartheta}^4 - bs_{\vartheta}^2 + bs_{\vartheta}^4) + s_{\vartheta}^2 - s_{\vartheta}^4 - bs_{\vartheta}^4 + bs_{\vartheta}^6 \right) \\ &= \frac{1}{((1 - bs_{\vartheta}^2)s_{\vartheta}^2)^2} (s_{\vartheta}^4 - bs_{\vartheta}^4) \\ &= \frac{1 - b}{(1 - bs_{\vartheta}^2)^2} \\ &= \frac{a^2}{(1 - bs_{\vartheta}^2)^2}. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Hausaufgabe 12.(b) überein.