Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 10

Hausaufgaben

Hausaufgabe 19

Sei $a \in (0,1)$. Wir schreiben $b := 1 - a^2$. Es parametrisiert

$$\Phi(\vartheta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\cos(\vartheta) \end{pmatrix} ,$$

wobei $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\vartheta \in [0,\pi]$, ein Ellipsoid S; vgl. Hausaufgaben 10, 12, 14, 18.

(a) Nebenrechnungen: Man bestimme die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u}{(a^2+bu^2)^{1/2}}$.

Man verwende dies, um $\int \frac{\sin(\vartheta)}{(a^2+b\cos(\vartheta)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\vartheta$ zu berechnen.

(b) Man bestätige Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

(c) Wir betrachten das Viereck

$$J \;:=\; \{\; \binom{\vartheta}{\varphi} \mid \vartheta \in [\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2}],\ \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\} \;\subseteq\; U \;=\; [0,2\pi]\times[0,\pi] \;.$$

Dann ist $A := \Phi(J)$ ein krummliniges Viereck auf dem Ellipsoid S.

Man verwende Gauß-Bonnet, Version 1, um $\int_{\partial A}\kappa\cdot\cos(\beta)\,\mathrm{d}s$ zu bestimmen.

Lösung.

(a) Es wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u}{(a^2+bu^2)^{1/2}} \;&=\; \frac{1\cdot(a^2+bu^2)^{1/2} - u\cdot\frac{1}{2}(a^2+bu^2)^{-1/2}\cdot 2bu}{((a^2+bu^2)^{1/2})^2} \\
&=\; \frac{(a^2+bu^2) - u\cdot bu}{(a^2+bu^2)^{3/2}} \\
&=\; \frac{a^2}{(a^2+bu^2)^{3/2}} \;.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \cos(\vartheta)$ und also $\mathrm{d}u = -\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(\vartheta)}{(a^2+b\cos(\vartheta)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\vartheta \;&=\; -\int \frac{1}{(a^2+bu^2)^{3/2}}\;\mathrm{d}u \\
&=\; [-\frac{u}{a^2(a^2+bu^2)^{1/2}}] \\
&=\; [-\frac{\cos(\vartheta)}{a^2(a^2+b\cos(\vartheta)^2)^{1/2}}]
\end{aligned}$$

(b) Für das Ellipsoid S ist $g = 0$. Gemäß Hausaufgabe 14 oder Hausaufgabe 18 ist

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\vartheta,\varphi) \;=\; \frac{a^2}{(1 - b\mathrm{s}_\vartheta^2)^2} \;.$$

Dank Hausaufgabe 12 wird $\Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} a\mathrm{s}_\vartheta^2\,\mathrm{c}_\varphi \\ a\mathrm{s}_\vartheta^2\mathrm{s}_\varphi \\ \mathrm{c}_\vartheta\,\mathrm{s}_\vartheta \end{pmatrix}$ und also

$$|\Phi_\vartheta\times\Phi_\varphi| \;=\; (a^2\mathrm{s}_\vartheta^4\,\mathrm{c}_\varphi^2 + a^2\mathrm{s}_\vartheta^4\mathrm{s}_\varphi^2\,\mathrm{c}_\vartheta^2\,\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2} \;=\; (a^2\mathrm{s}_\vartheta^2+\mathrm{c}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta \;=\; (\mathrm{s}_\vartheta^2-b\mathrm{s}_\vartheta^2+\mathrm{c}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta \;=\; (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta\ .$$

Alternativ kann man hierfür auch mit Hausaufgabe 12

$$|\Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi| \;=\; (\det\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G\end{smallmatrix}\right))^{1/2} \;=\; (1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta$$

rechnen.

Wir bemerken noch:

$$\begin{aligned} 1-b\mathrm{s}_\vartheta^2 &= 1-b+b-b\mathrm{s}_\vartheta^2 \\ &= a^2+b\,\mathrm{c}_\vartheta^2\ . \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O &= \textstyle\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\vartheta,\varphi)\cdot|\Phi_\vartheta\times\Phi_\varphi|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \textstyle\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{a^2}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^2}\cdot(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\textstyle\int_{\vartheta=0}^{\pi}\frac{a^2\mathrm{s}_\vartheta}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\textstyle\int_{\vartheta=0}^{\pi}\frac{a^2\mathrm{s}_\vartheta}{(a^2+b\,\mathrm{c}_\vartheta^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\overset{\text{(a)}}{=} 2\pi\big[-\tfrac{\mathrm{c}_\vartheta}{(a^2+b\,\mathrm{c}_\vartheta^2)^{1/2}}\big]_{\vartheta=0}^{\pi} \\ &= 2\pi\big((-\tfrac{(-1)}{(a^2+b(-1)^2)^{1/2}})-(-\tfrac{1}{(a^2+b\cdot 1^2)^{1/2}})\big) \\ &= 4\pi \\ &= 2\pi\cdot(2-2\cdot g)\ . \end{aligned}$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

(c) Gemäß Gauß-Bonnet, Version 1, ist, in den dortigen Bezeichnungen,

$$\int_{\partial A}\kappa\cdot\cos(\beta)\,\mathrm{d}s \;=\; 2\pi - \iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O - \sum_{j=1}^{4}\alpha_{(j)}\ .$$

Wie in (b) berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O &= \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\vartheta,\varphi)\cdot|\Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^2}\cdot(1-b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\,\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\mathrm{s}_\vartheta}{(a^2+b\,\mathrm{c}_\vartheta^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\vartheta \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\mathrm{c}_\vartheta}{(a^2+b\,\mathrm{c}_\vartheta^2)^{1/2}}\right]_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{1}{2}}{(a^2+\frac{b}{4})^{1/2}} \\
&= \frac{\pi}{4(4a^2+b)^{1/2}} \\
&= \frac{\pi}{4(1+3a^2)^{1/2}}\,.
\end{aligned}
$$

Es ist der Rand von J stückweise parametrisiert durch

$$
\begin{aligned}
c_{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3}+t \\ 0 \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{6}] \\
c_{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{4}] \\
c_{(3)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}-t \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{6}] \\
c_{(4)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{4}-t \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{4}]\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist der Rand von A stückweise parametrisiert durch $C_{(j)}(t) = \Phi(c_{(j)}(t))$, wobei $1 \leqslant j \leqslant 4$. Mittels $\Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\varphi \\ \mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{s}_\varphi \\ a\,\mathrm{c}_\vartheta \end{pmatrix}$ berechnen wir

$$
\begin{aligned}
C_{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{3}+t) \\ 0 \\ a\cos(\frac{\pi}{3}+t) \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{6}] \\
C_{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{4}] \\
C_{(3)}(t) &= \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}-t)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin(\frac{\pi}{2}-t)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ a\cos(\frac{\pi}{2}-t) \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{6}] \\
C_{(4)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}, & t &\in [0,\tfrac{\pi}{4}]\,.
\end{aligned}
$$

Es wird

$$\begin{aligned}
C'_{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}+t) \\ 0 \\ -a\sin(\frac{\pi}{3}+t) \end{pmatrix}, & t \in [0, \tfrac{\pi}{6}] \\
C'_{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, \tfrac{\pi}{4}] \\
C'_{(3)}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\pi}{2}-t)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\cos(\frac{\pi}{2}-t)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ a\sin(\frac{\pi}{2}-t) \end{pmatrix}, & t \in [0, \tfrac{\pi}{6}] \\
C'_{(4)}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, \tfrac{\pi}{4}]\,.
\end{aligned}$$

Zu $\alpha_{(1)}$. Es werden

$$C'_{(1)}(\tfrac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \qquad C'_{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Also ist $\alpha_{(1)} = \frac{\pi}{2}$.

Zu $\alpha_{(2)}$. Es werden

$$C'_{(2)}(\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C'_{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Also ist $\alpha_{(2)} = \frac{\pi}{2}$.

Zu $\alpha_{(3)}$. Es werden

$$C'_{(3)}(\tfrac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ a\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad C'_{(4)}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Also ist $\alpha_{(3)} = \frac{\pi}{2}$.

Zu $\alpha_{(4)}$. Es werden

$$C'_{(4)}(\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C'_{(1)}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -a\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Also ist $\alpha_{(4)} = \frac{\pi}{2}$.
Insgesamt wird

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\,\mathrm{d}s &= 2\pi - \iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O - \sum_{j=1}^{4} \alpha_{(j)} \\
&= 2\pi - \frac{\pi}{4(1+3a^2)^{1/2}} - 2\pi \\
&= -\frac{\pi}{4(1+3a^2)^{1/2}}\,.
\end{aligned}$$

Nicht gefragt, aber dennoch durchführbar, ist eine direkte Berechnung von $\int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\, \mathrm{d}s$. Wir wollen sie kurz skizzieren.

Die von $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ und $C_{(3)}$ parametrisierten Kanten von A sind Geodäten auf S. Dort ist $\beta = \frac{\pi}{2}$ und also $\cos(\beta) = 0$.

Die von $C_{(4)}$ parametrisierte Kante von A liegt auf einem Kreis von Radius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dort ist also $\kappa = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Der Normalenvektor n am Punkt $C_{(4)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ dieser Kante weist in Richtung der x_3-Achse und verläuft in der Ebene $x_3 = \frac{a}{2}$. Also ist $n = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Mithin erhalten wir den Binormalenvektor

$$\mathrm{b} \;=\; v \times n \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ \cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dort ist ferner

$$\mathfrak{n} \;=\; \Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} a\mathrm{s}_\vartheta^2\, \mathrm{c}_\varphi \\ a\mathrm{s}_\vartheta^2 \mathrm{s}_\varphi \\ \mathrm{c}_\vartheta\, \mathrm{s}_\vartheta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{3a}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{3a}{4}\sin(\frac{\pi}{4}-t) \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

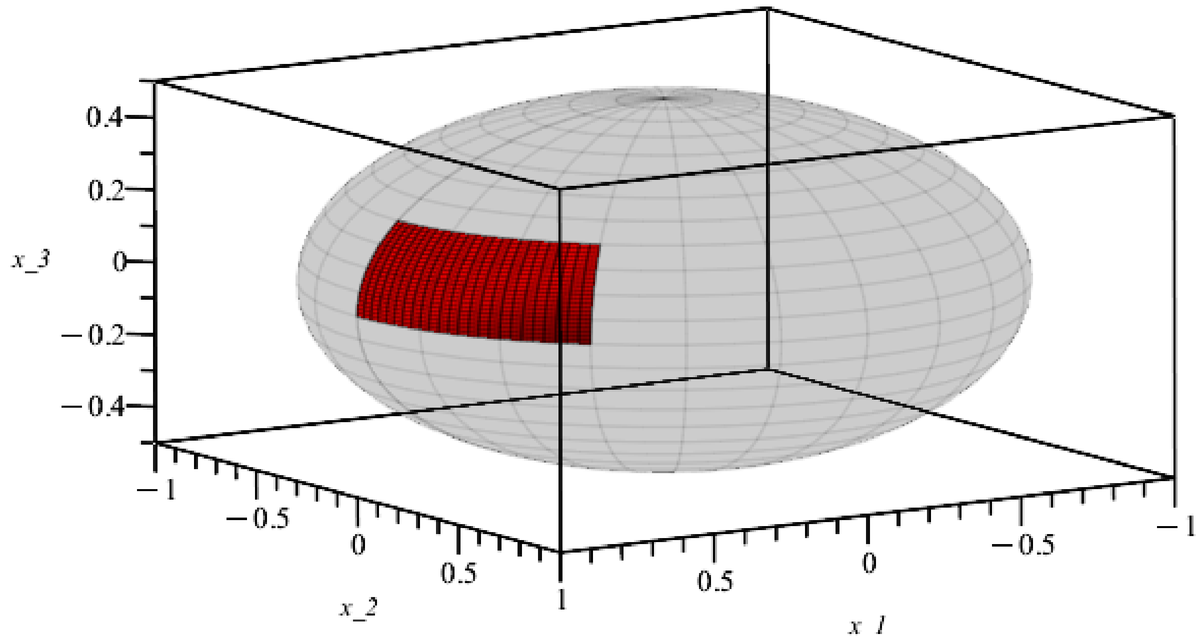
Es schließen $\mathfrak{n}$ und b einen Winkel β ein mit

$$\cos(\beta) \;=\; \frac{\langle \mathfrak{n} | \mathrm{b} \rangle}{|\mathfrak{n}| \cdot |\mathrm{b}|} \;=\; \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{(1 - b\mathrm{s}_\vartheta^2)^{1/2}\, \mathrm{s}_\vartheta \cdot 1} \;=\; \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{(1 - b\frac{3}{4})^{1/2}\, \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1} \;=\; -\frac{1}{(4-3b)^{1/2}}.$$

Insgesamt wird

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\, \mathrm{d}s \;&=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\tfrac{1}{(4-3b)^{1/2}}\right) \cdot |C'_{(4)}(t)|\; \mathrm{d}t \\ &=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\tfrac{1}{(4-3b)^{1/2}}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\; \mathrm{d}t \\ &=\; -\tfrac{\pi}{4(4-3b)^{1/2}} \\ &=\; -\tfrac{\pi}{4(1+3a^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



Hier wurde $a = 0{,}5$ gesetzt.
In rot die betrachtete Fläche $A = \Phi(J)$.