Künzer 14.02.2025

Differentialgeometrie für Geodäten

Scheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (1+3+2 = 6 Punkte)

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(t) \;=\; \begin{pmatrix} t \\ 2\sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

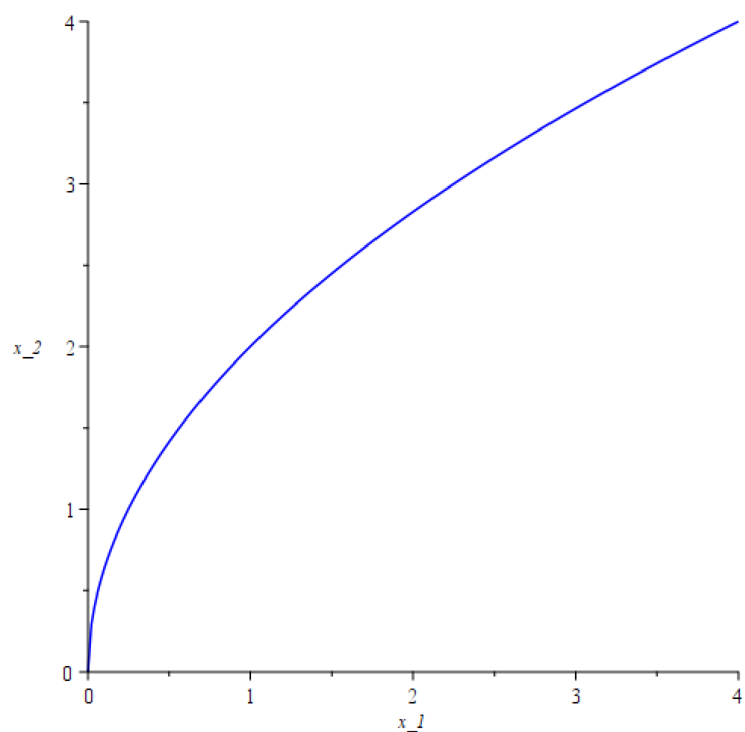
(a) Man skizziere diese Kurve im Bereich $t \in [0, 4]$ in der x_1-x_2-Ebene.

(b) Man bestimme $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'(t) \times C''(t)$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Man bestimme für diese Kurve den Krümmungskreisradius $\rho(t)$ und den Binormalenvektor $b(t)$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Lösung.

(a) Skizze der Kurve im Parameterbereich $t \in [0, 4]$.



(b) Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-3/2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$C'(t) \times C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ t^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-3/2} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-3/2} \end{pmatrix} .$$

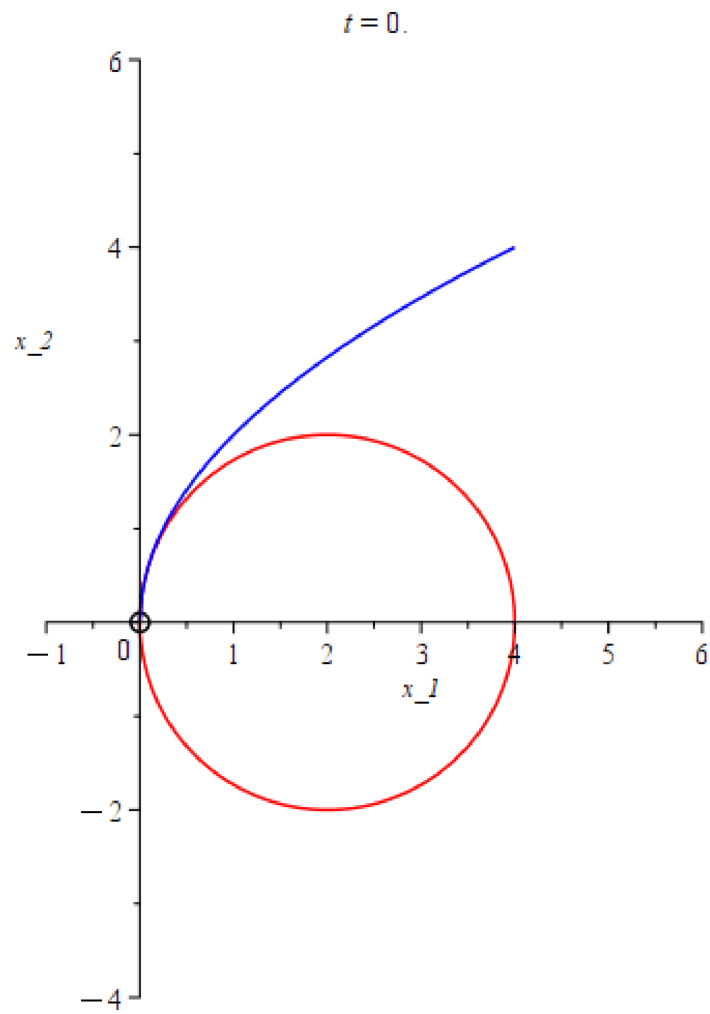
(c) Der Krümmungskreisradius ergibt sich zu

$$\rho(t) \;=\; \frac{|C'(t)|^3}{|C'(t) \times C''(t)|} \;=\; \frac{(\sqrt{1+t^{-1}})^3}{\frac{1}{2}t^{-3/2}} \;=\; 2t^{3/2}(1+t^{-1})^{3/2} \;=\; 2(t+1)^{3/2} .$$

Der Binormalenvektor ergibt sich zu

$$b(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{|C'(t) \times C''(t)|} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{2}t^{-3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-3/2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



Dargestellt in rot ist der Krümmungskreis an jeweiligen Punkt der blauen Kurve – mit dem berechneten Krümmungskreisradius.

Aufgabe 2 (3+3+2 = 8 Punkte)
Es parametrisiert

$$\Phi \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \; : \; \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 \end{pmatrix}$$

die Fläche $S = \Phi(\mathbb{R}^2)$.

Sei $c(t) := \binom{t}{0}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K auf S, die durch $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

(a) Man bestimme die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man bestimme die Matrizen Γ^1 und Γ^2, die die Christoffelsymbole enthalten, für $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(c) Man entscheide, ob $K = \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf S ist.

Lösung.

(a) Es ist $\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}$, $\Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und also

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle & \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_v | \Phi_u \rangle & \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Folglich sind

$$\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 8u & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) .$$

(b) Wir berechnen die Christoffelsymbole.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} (1+4u^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{4u}{0} = \frac{4u}{1+4u^2} \binom{1}{0} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} &&= \binom{0}{0} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} &&= \binom{0}{0}
\end{aligned}$$

Folglich wird

$$\Gamma^1 \;=\; \frac{4u}{1+4u^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \Gamma^2 \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) .$$

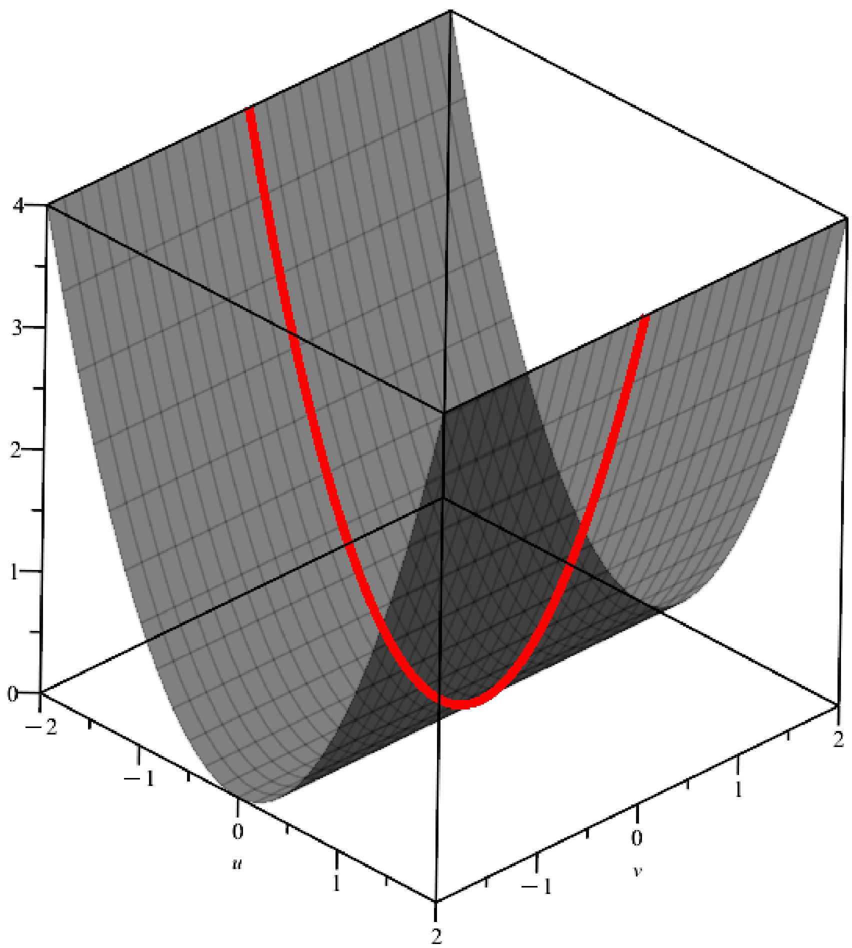
(c) Es ist $c' = c'(t) = \binom{1}{0}$. Es ist $c'' = c''(t) = \binom{0}{0}$.
Allgemein ist also $c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) c' = (1\;0) \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \binom{1}{0} = \alpha$.
Bei $\binom{u}{v} = c(t) = \binom{t}{0}$ werden $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 1+4t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 8t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,
$\Gamma^1 \;=\; \frac{4t}{1+4t^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung erhalten wir folgendes.

$$
\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}} \Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}} \Gamma^2 c' \end{pmatrix} \; - \; \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c'_1 + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\
= \; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4t}{1+4t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \; - \; \frac{1}{1+4t^2} \left(0 + \tfrac{1}{2}\, 8t \cdot 1 + 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \; & \begin{pmatrix} \frac{4t}{1+4t^2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4t}{1+4t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; .
\end{aligned}
$$

Also ist $K = \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf S.

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



In grau die Fläche S. In rot die Kurve $K = \Phi(c(\mathbb{R}))$.

Aufgabe 3 (2+4+1+2+4+3 = 16 Punkte)
Sei $U := [-2, 2] \times [-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{\varphi} \mapsto \Phi(u, \varphi) := \begin{pmatrix} u \\ (4-u^2)\sin(\varphi) \\ (4-u^2)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Es parametrisiert Φ die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch Rotation der Kurve $x_3 = 4 - x_1^2$ im Bereich $-2 \leqslant x_1 \leqslant 2$ um die x_1-Achse entsteht.

Sei $c : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) := \binom{1}{t}$. Sei $C := \Phi \circ c$, also $C(t) = \Phi(c(t))$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Sei daran erinnert: Es darf $\mathrm{s}_\varphi := \sin(\varphi)$ und $\mathrm{c}_\varphi := \cos(\varphi)$ abgekürzt werden.

(a) Man bestimme Φ_u , Φ_φ , Φ_{uu} , $\Phi_{u\varphi}$, $\Phi_{\varphi\varphi}$ und $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_\varphi$.

(b) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$ bei $\binom{u}{\varphi} \in U$.

(c) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ von S an der Stelle $\binom{u}{\varphi} \in U$.

(d) Man bestimme die Weingarten-Matrix W an der Stelle $\binom{u}{\varphi} \in U$.
Man bestimme die Hauptkrümmungen an der Stelle $\binom{u}{\varphi} = \binom{0}{0}$.

(e) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$ und den Normalenvektor $n(t)$ der durch $C(t)$ parametrisierten Kurve, wobei $t \in [-\pi, \pi]$.

(f) Sei $\nu = \nu(t)$ der von $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(c(t))$ und $n = n(t)$ eingeschlossene Winkel.
Man bestimme $\kappa(t) \cdot \cos(\nu(t))$ für $t \in [-\pi, \pi]$ unter Verwendung von (b).
Man berechne hieraus $\cos(\nu(t))$ unter Verwendung von (e).

Lösung.

(a) Es wird

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2u\,\mathrm{s}_\varphi \\ -2u\,\mathrm{c}_\varphi \end{pmatrix}, \qquad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ (4-u^2)\,\mathrm{c}_\varphi \\ -(4-u^2)\,\mathrm{s}_\varphi \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,\mathrm{s}_\varphi \\ -2\,\mathrm{c}_\varphi \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{u\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u\,\mathrm{c}_\varphi \\ 2u\,\mathrm{s}_\varphi \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(4-u^2)\,\mathrm{s}_\varphi \\ -(4-u^2)\,\mathrm{c}_\varphi \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird

$$\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2u\,\mathrm{s}_\varphi \\ -2u\,\mathrm{c}_\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ (4-u^2)\,\mathrm{c}_\varphi \\ -(4-u^2)\,\mathrm{s}_\varphi \end{pmatrix} = (4-u^2)\begin{pmatrix} 2u \\ \mathrm{s}_\varphi \\ \mathrm{c}_\varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle & \langle \Phi_u | \Phi_\varphi \rangle \\ \langle \Phi_\varphi | \Phi_u \rangle & \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 0 \\ 0 & (4-u^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $EG - F^2 \;=\; (1+4u^2)(4-u^2)^2$. Damit wird

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\begin{smallmatrix} \langle \Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle \Phi_{u\varphi}|\mathfrak{n}\rangle \\ \langle \Phi_{\varphi u}|\mathfrak{n}\rangle & \langle \Phi_{\varphi\varphi}|\mathfrak{n}\rangle \end{smallmatrix}\right) \;=\; \tfrac{(4-u^2)}{\sqrt{(1+4u^2)(4-u^2)^2}} \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -(4-u^2) \end{smallmatrix}\right) \;=\; -\tfrac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4-u^2 \end{smallmatrix}\right) .$$

(c) Die Gaußkrümmung wird

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \;=\; \tfrac{LN-M^2}{EG-F^2} \;=\; \tfrac{\frac{1}{1+4u^2}\cdot 2(4-u^2)}{(1+4u^2)(4-u^2)^2} \;=\; \tfrac{2}{(1+4u^2)^2(4-u^2)} .$$

(d) Die Weingarten-Matrix wird

$$\mathrm{W} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} (1+4u^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (4-u^2)^{-2} \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4-u^2 \end{smallmatrix}\right)\right) \;=\; -\tfrac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \left(\begin{smallmatrix} \frac{2}{1+4u^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4-u^2} \end{smallmatrix}\right) .$$

Die Hauptkrümmungen an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ergeben sich aus den Diagonaleinträgen zu

$$\lambda_1 \;=\; -\tfrac{1}{\sqrt{1+4\cdot 0^2}} \cdot \tfrac{2}{1+4\cdot 0^2} \;=\; -2$$

und zu

$$\lambda_2 \;=\; -\tfrac{1}{\sqrt{1+4\cdot 0^2}} \cdot \tfrac{1}{4-0^2} \;=\; -\tfrac{1}{4} .$$

(e) Es ist $C(t) = \Phi(1,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\,\mathrm{s}_t \\ 3\,\mathrm{c}_t \end{pmatrix}$. Also ist $C'(t) = 3\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix}$ und $C''(t) = 3\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{c}_t \end{pmatrix}$.

Ferner wird $C'(t) \times C''(t) \;=\; 3\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix} \times 3\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{c}_t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich die Krümmung zu

$$\kappa(t) \;=\; \frac{|C'(t) \times C''(t)|}{|C'(t)|^3} \;=\; \frac{9}{27} \;=\; \frac{1}{3} .$$

Der Normalenvektor wird

$$n(t) \;=\; \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|\cdot|C'(t)|}(\langle C'(t)|C'(t)\rangle C''(t) - \langle C'(t)|C''(t)\rangle C'(t)) \;=\; \tfrac{1}{9\cdot 3}(9\cdot 3\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{c}_t \end{pmatrix} - 0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{c}_t \end{pmatrix} .$$

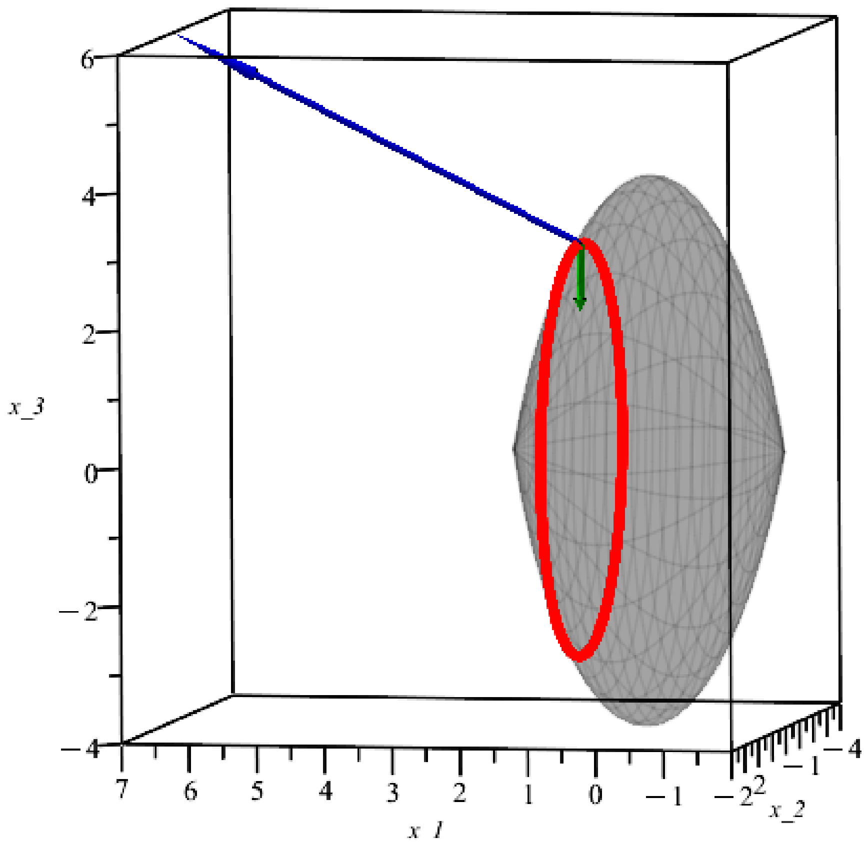
(f) Es ist $c'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also wird bei $\left(\begin{smallmatrix} u \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ unter Verwendung von (b)

$$\kappa(t)\cdot\cos(\nu(t)) \;=\; \frac{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)c'}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c'} \;=\; \frac{N}{G} \;=\; \frac{-\frac{4-1^2}{\sqrt{1+4\cdot 1^2}}}{(4-1^2)^2} \;=\; -\frac{1}{3\sqrt{5}} .$$

Somit wird unter Verwendung von (e)

$$\cos(\nu(t)) \;=\; \kappa(t)^{-1}\cdot(\kappa(t)\cdot\cos(\nu(t))) \;=\; 3\cdot(-\tfrac{1}{3\sqrt{5}}) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Noch eine Graphik (nicht verlangt):



In grau die Rotationsfläche S. In rot die von $C(t) = \Phi(c(t))$ parametrisierte Kurve. In grün der Normalenvektor $n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bei $t = 0$. In blau der Vektor $\mathfrak{n} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $c(0) = \binom{1}{0}$.
Nicht verlangt: Als Probe kann man direkt ausrechnen:

$$\cos(\nu(t)) \;=\; \frac{\langle n \,|\, \mathfrak{n}\rangle}{|n| \cdot |\mathfrak{n}|} \;=\; \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\,\mathrm{s}_t \\ -\,\mathrm{c}_t \end{pmatrix} \,|\, 3\begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}\rangle}{1 \cdot |3\begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}|} \;=\; \frac{-3}{3\sqrt{5}} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$