Differentialgeometrie für Geodäten

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

31. Oktober 2024

Inhalt

Vorwort

Inhalt ist Differentialgeometrie von Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$.

Vorausgesetzt wird Höhere Mathematik 1 ing, also Lineare Algebra und Geometrie **[3]**, und Höhere Mathematik 2 ing, also Analysis **[4]**. Auch werden Integrationstechniken aus Höhere Mathematik 3 ing zum Einsatz gebracht **[5]**.

Insbesondere wird der Begriff der Parametrisierung einer Kurve vorausgesetzt. Wir werden aber kurze Erinnerungen einbauen.

Solange das Skript im Entstehen ist, wird wegen laufender Änderungen empfohlen, es nicht auszudrucken, sondern als File regelmäßig zu aktualisieren.

Als Grundlage verwenden wir das Skript von Mark Hamilton **[2]** und den Band Differentialgeometrie aus der Reihe von Bernhard Baule **[1]**.

Dank geht an Monika Truong für Diskussionen über den Inhalt während der Erstellung.

Für Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, Winter 2022/23

Matthias Künzer

Kapitel 1

Kurven im Raum

1.1 Parametrisierungen

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Sei

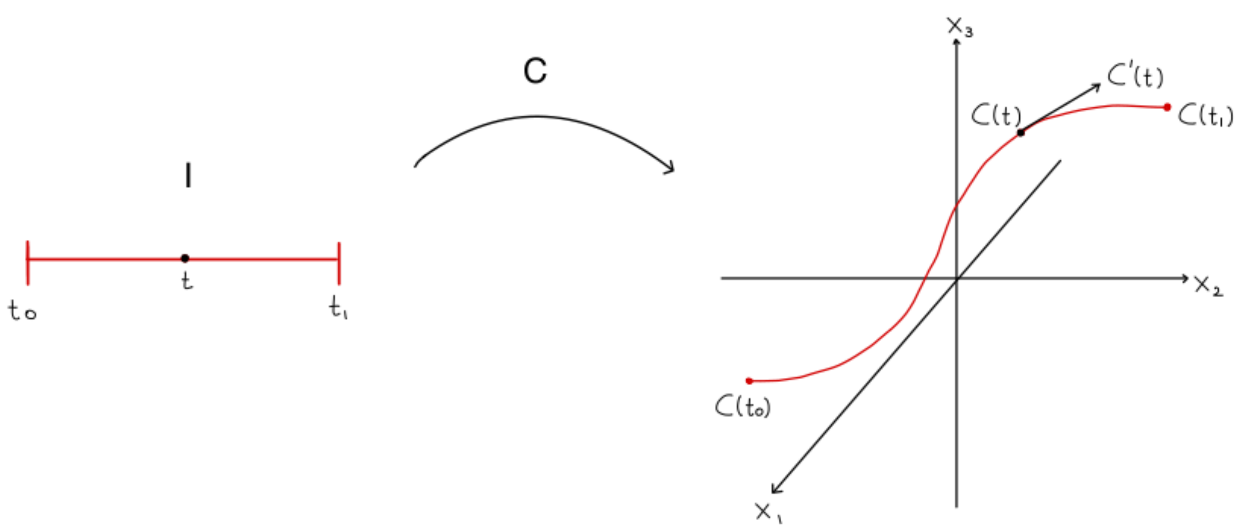
$$C : I \to \mathbb{R}^3$$

eine beliebig oft differenzierbare Abbildung mit $C'(t) \neq 0$ für $t \in I$.

Dann heißt C eine *reguläre Parametrisierung* der Kurve $K := C(I)$.

Sei in diesem Abschnitt §1.1 eine solchermaßen via C parametrisierte Kurve K gegeben.

Es ist $C'(t)$ ein Vektor tangential an die Kurve im Punkt $C(t)$.



Für $a,\, b \in I$ mit $a < b$ und die Kurve $K_{a,b} := C([a,b])$, die von $C(a)$ bis $C(b)$ läuft, ist

$$\mathrm{L}(K_{a,b}) \;=\; \int_a^b |C'(t)| \;\mathrm{d}t$$

die Länge der Kurve $K_{a,b}$. Vgl. **[4,** 5.4.2**]**.

Bemerkung. Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei

$$u \;: J \;\to\; I \;:\; s \;\mapsto\; u(s)$$

beliebig oft differenzierbar und bijektiv, mit $u'(s) > 0$ für $s \in J$.

Sei auch $u^{-1} : I \to J$ beliebig oft differenzierbar.

Dann ist

$$C \circ u \;:\; J \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; s \;\mapsto C(u(s))$$

auch eine reguläre Parametrisierung von K.

Denn nach der Kettenregel wird

$$(C \circ u)'(s) \;=\; C'(u(s)) \cdot u'(s)$$

vgl. **[4,** 4.8.3**]**. Dies ist stetig und überall ungleich 0.

Wir sagen, es wurde die Kurve K von C zu $\tilde{C} := C \circ u$ *umparametrisiert.*

Beispiel. Sei $r > 0$. Sei $h > 0$.

Dann parametrisiert

$$C \;:\; \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; t \;\mapsto\; C(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}$$

eine Schraubenlinie von Radius r und Ganghöhe $2\pi h$.

Es ist $C'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}$ und also $|C'(t)| = \sqrt{r^2 + h^2} =: d$.

Sei $u(s) = s/d$. Dann ist $u'(s) = \frac{1}{d} > 0$ und

$$\tilde{C}(s) \;:=\; (C \circ u)(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/d) \\ r\sin(s/d) \\ hs/d \end{pmatrix}$$

Es wird

$$\tilde{C}'(s) \;=\; \tfrac{1}{d} \begin{pmatrix} -r\sin(s/d) \\ r\cos(s/d) \\ h \end{pmatrix}$$

und also

$$|\tilde{C}'(s)| \;=\; \tfrac{1}{d}\sqrt{r^2 + h^2} \;=\; 1$$

für $s \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Seien p, $q > 0$. Es parametrisiert

$$C \ : \ [0, 2\pi] \ \to \ \mathbb{R}^3 \ : \ t \ \mapsto \ C(t) = \left(\begin{smallmatrix} p\cos(t) \\ q\sin(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

eine Ellipse in der x_1-x_2-Ebene mit Halbachsen p auf der x_1-Achse und q auf der x_2-Achse.
Es ist $C'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -p\sin(t) \\ q\cos(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist

$$|C'(t)| \ = \ \sqrt{p^2\sin(t)^2 + q^2\cos(t)^2} \ = \ \sqrt{(p^2 - q^2)\sin(t)^2 + q^2} \ .$$

Definition. Es heißt C eine *normierte Parametrisierung* oder eine *Parametrisierung nach Bogenlänge* von K, wenn

$$|C'(t)| \ = \ 1$$

ist für $t \in I$.

Häufig verwenden wir bei einer normierten Parametrisierung den Parameternamen s.

Bemerkung. Es gibt eine normierte Parametrisierung von K.

Denn dafür sollte nach Umparametrisierung

$$|(C \circ u)'(s)| \;=\; |C'(u(s))| \cdot u'(s) \;=\; 1$$

sein für $s \in J$, d.h.

$$[H(u)] := \int |C'(u)| \text{ d}u \;=\; \int |C'(u(s))| \cdot u'(s) \text{ d}s \;=\; \int 1 \text{ d}s = [s]\,.$$

Da $|C(u)| > 0$ stets, ist die Stammfunktion $H(u)$ streng monoton wachsend und somit invertierbar bei geeigneter Wahl von Definitions- und Zielbereich.

Wir können also

$$u \;=\; H^{-1}(s)$$

wählen, um die normierte Parametrisierung

$$\tilde{C}(s) \;:=\; C(u(s)) \;=\; C(H^{-1}(s))$$

zu erhalten.

Bemerkung. Beim Beispiel der Ellipse können wir eine normierte Parametrisierung nicht mehr durch eine Rechnung angeben, da das Integral $\int \sqrt{(p^2 - q^2)\sin(u)^2 + q^2} \text{ d}u$ nicht geschlossen berechnet werden kann.

Wir tun also gut daran, zu den Formeln, die wir im folgenden unter Voraussetzung einer normierten Parametrisierung bekommen werden, auch immer noch die Formeln für eine allgemeine Parametrisierung anzugeben.

1.2 Normalenvektor und Krümmungskreis

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei

$$C \;:\; I \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; s \;\mapsto\; C(s)$$

eine normierte reguläre Parametrisierung der Kurve $K = C(I)$.

Definition. Es ist

$$v(s) \;:=\; C'(s)$$

der *Tangentenvektor* an K im Punkt $C(s)$.

Nach Voraussetzung ist $|v(s)| = 1$ für $s \in I$.

Definition. Sei $s \in I$. Es ist

$$\kappa(s) \;:=\; |v'(s)| \;=\; |C''(s)|$$

die *Krümmung* von K im Punkt $C(s)$.

Es ist

$$\rho(s) \;:=\; \frac{1}{\kappa(s)}$$

der *Krümmungskreisradius* von K im Punkt $C(s)$.

Falls dabei $\kappa(s) = 0$ ist, ist $\rho(s) = +\infty$.

Anschauliche Begründung: Ist $\mathrm{d}\varphi$ der infinitesimale Winkel zwischen $v(s)$ und $v(s + \mathrm{d}s)$, beide an $C(s)$ angeheftet, dann ist

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \;=\; |v'(s)| \;.$$

Ferner ist

$$\rho(s)\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \mathrm{d}s \;.$$

Also ist in der Tat

$$\rho(s) \;=\; \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} \;=\; \frac{1}{|v'(s)|} \;=\; \frac{1}{\kappa(s)}$$

Bemerkung. Sind

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto p(s) = \begin{pmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \\ p_3(s) \end{pmatrix}$$
$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto q(s) = \begin{pmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \end{pmatrix}$$

differenzierbare vektorwertige Abbildungen, dann wird

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle p(s)\,|\,q(s)\rangle &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(p_1(s)q_1(s) + p_2(s)q_2(s) + p_3(s)q_3(s)\big) \\ &= p_1'(s)q_1(s) + p_2'(s)q_2(s) + p_3'(s)q_3(s) + p_1(s)q_1'(s) + p_2(s)q_2'(s) + p_3(s)q_3'(s) \\ &= \langle p'(s)\,|\,q(s)\rangle + \langle p(s)\,|\,q'(s)\rangle \;. \end{aligned}$$

Die Produktregel gilt also in dieser Form auch für das Skalarprodukt.

Definition. Sei $s \in I$ mit $\kappa(s) = |C''(s)| \neq 0$. Dann ist

$$n(s) \;:=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; v'(s) \cdot \rho(s)$$

der *Normalenvektor* an K im Punkt $C(s)$.

In der Tat können wir aus

$$\langle v(s)\,|\,v(s)\rangle \;=\; 1$$

durch Ableiten folgern, daß

$$0 \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle v(s)\,|\,v(s)\rangle \;=\; \langle v'(s)\,|\,v(s)\rangle + \langle v(s)\,|\,v'(s)\rangle \;=\; 2\langle v(s)\,|\,v'(s)\rangle \;=\; 2\langle v(s)\,|\,n(s)\rangle \cdot |C''(s)|$$

und somit

$$0 \;=\; \langle v(s) \,|\, n(s) \rangle \;.$$

D.h. es sind $v(s)$ und $n(s)$ zueinander senkrechte Vektoren von Länge 1.

Hierbei verläuft der Krümmungskreis in der Ebene mit Aufpunkt $C(s)$ und Richtungsvektoren $v(s)$ und $n(s)$. Genauer gilt folgendes.

Definition. Sei $s \in I$ mit $\kappa(s) = |C''(s)| \neq 0$. Dann ist der *Mittelpunkt des Krümmungskreises* der von C parametrisierten Kurve am Punkt $C(s)$ gegeben durch

$$M(s) \;:=\; C(s) + n(s) \cdot \rho(s) \;=\; C(s) + C''(s) \cdot \frac{1}{|C''(s)|^2} \;.$$

Am Punkt $C(s)$ ist der *Krümmungskreis* selbst parametrisiert durch

$$\varphi \;\mapsto\; M(s) - n(s)\rho(s)\cos(\varphi) + v(s)\rho(s)\sin(\varphi)$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Beispiel. Quasi als Probe betrachten wir einen Kreis von Radius 2 in der x_1-x_2-Ebene, parametrisiert durch

$$C(s) \;=\; 2\begin{pmatrix} \sin(s/2) \\ \cos(s/2) \\ 0 \end{pmatrix} \;,$$

wobei $s \in [0, 4\pi]$.

Es ist $|C'(s)| = \left|\begin{pmatrix} \cos(s/2) \\ -\sin(s/2) \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1$. Es liegt also eine normierte Parametrisierung vor.

Es ist $C''(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(s/2) \\ -\cos(s/2) \\ 0 \end{pmatrix}$. Hieraus erhalten wir die Krümmung

$$\kappa(s) \;=\; |C''(s)| \;=\; \frac{1}{2} \;.$$

Somit ergibt sich der Krümmungskreisradius zu

$$\rho(s) \;=\; \frac{1}{|C''(s)|} \;=\; 2 \;,$$

sowie der Normalenvektor zu

$$n(s) \;=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(s/2) \\ -\cos(s/2) \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Desweiteren erhalten wir den Krümmungskreismittelpunkt

$$M(s) \;:=\; C(s) + n(s) \cdot \rho(s) \;=\; 2\begin{pmatrix} \sin(s/2) \\ \cos(s/2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(s/2) \\ -\cos(s/2) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,$$

was auch der Erwartung entspricht.

Beispiel. Seien r, $h > 0$. Sei $d := \sqrt{r^2 + h^2}$.
Wir betrachten die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/d) \\ r\sin(s/d) \\ hs/d \end{pmatrix}$$

für $s \in \mathbb{R}$ normiert parametrisierte Schraubenlinie aus §1.1, von Radius r und Ganghöhe $2\pi h$. Es war

$$v(s) \;=\; C'(s) \;=\; \tfrac{1}{d}\begin{pmatrix} -r\sin(s/d) \\ r\cos(s/d) \\ h \end{pmatrix}$$

Es wird

$$C''(s) \;=\; \tfrac{r}{d^2}\begin{pmatrix} -\cos(s/d) \\ -\sin(s/d) \\ 0 \end{pmatrix}\;.$$

Hieraus erhalten wir die Krümmung

$$\kappa(s) \;=\; |C''(s)| \;=\; \frac{r}{d^2} = \frac{r}{r^2+h^2}\;.$$

Somit ergibt sich der Krümmungskreisradius zu

$$\rho(s) \;=\; \frac{1}{|C''(s)|} \;=\; \frac{r^2+h^2}{r} \;=\; r + \frac{h^2}{r}\;,$$

sowie der Normalenvektor zu

$$n(s) \;=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \begin{pmatrix} -\cos(s/d) \\ -\sin(s/d) \\ 0 \end{pmatrix}\;.$$

Desweiteren erhalten wir den Krümmungskreismittelpunkt

$$M(s) \;:=\; C(s) + n(s)\cdot\rho(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/d) \\ r\sin(s/d) \\ hs/d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(s/d) \\ -\sin(s/d) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\left(r + \tfrac{h^2}{r}\right) \;=\; \begin{pmatrix} -\cos(s/d)\cdot h^2/r \\ -\sin(s/d)\cdot h^2/r \\ hs/d \end{pmatrix}\;.$$

1.3 Binormalenvektor und Torsion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei

$$C \;:\; I \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; s \;\mapsto\; C(s)$$

eine normierte reguläre Parametrisierung der Kurve $K = C(I)$.

Definition. Es ist

$$b(s) \;:=\; v(s) \times n(s)$$

der *Binormalenvektor* an K im Punkt $C(s)$.

Da $n(s)$ auf $v(s)$ senkrecht steht und da diese Vektoren beide Länge 1 haben, ist auch $|b(s)| = 1$.

Es bilden $(v(s), n(s), b(s))$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Genauer gesagt liegt ein Rechtssystem vor: der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung $v(s)$, der Zeigefinger in Richtung $n(s)$, der Mittelfinger in Richtung $b(s)$.

Man nennt $(v(s), n(s), b(s))$ auch das *begleitende Dreibein* an K, wobei man hierfür von der Vorstellung her das s variiert.

Definition. Es heißt

$$\tau(s) \;:=\; \langle n'(s) \,|\, b(s)\rangle$$

die *Torsion* von K im Punkt $C(s)$.

Beispiel. Seien r, $h > 0$. Sei $d := \sqrt{r^2 + h^2}$.

Wir betrachten die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/d) \\ r\sin(s/d) \\ hs/d \end{pmatrix}$$

für $s \in \mathbb{R}$ normiert parametrisierte Schraubenlinie aus §1.1, von Radius r und Ganghöhe $2\pi h$.

Es war

$$\begin{array}{rcl} v(s) & = & \frac{1}{d}\begin{pmatrix} -r\sin(s/d) \\ r\cos(s/d) \\ h \end{pmatrix} \\ n(s) & = & \begin{pmatrix} -\cos(s/d) \\ -\sin(s/d) \\ 0 \end{pmatrix} . \end{array}$$

Der Binormalenvektor ergibt sich zu

$$b(s) \;=\; v(s) \times n(s) \;=\; \frac{1}{d}\begin{pmatrix} -r\sin(s/d) \\ r\cos(s/d) \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(s/d) \\ -\sin(s/d) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{d}\begin{pmatrix} h\sin(s/d) \\ -h\cos(s/d) \\ r \end{pmatrix}$$

Zur Probe können wir $\langle b(s) \,|\, b(s)\rangle = 1$, $\langle b(s) \,|\, v(s)\rangle = 0$ und $\langle b(s) \,|\, n(s)\rangle = 0$ überprüfen.

Es wird

$$n'(s) \;=\; \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \sin(s/d) \\ -\cos(s/d) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Torsion ergibt sich also zu

$$\tau(s) \;=\; \langle n'(s) \,|\, b(s)\rangle \;=\; \left\langle \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \sin(s/d) \\ -\cos(s/d) \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{d}\begin{pmatrix} h\sin(s/d) \\ -h\cos(s/d) \\ r \end{pmatrix} \right\rangle \;=\; \frac{h}{d^2} \;=\; \frac{h}{r^2+h^2} .$$

Lemma (Frenet-Gleichungen).

Für $s \in I$ mit $C''(s) \neq 0$ gilt folgendes.

$$\begin{array}{rcl} v'(s) & = & \kappa(s) \cdot n(s) \\ n'(s) & = & -\kappa(s) \cdot v(s) + \tau(s) \cdot b(s) \\ b'(s) & = & -\tau(s) \cdot n(s) \end{array}$$

Die erste Gleichung folgt aus

$$v'(s) \;=\; C''(s) \;=\; |C''(s)| \cdot \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \kappa(s) \cdot n(s) \;.$$

Für $a \in \mathbb{R}^3$ gilt bezüglich der Orthonormalbasis $(v(s), n(s), b(s))$

$$a \;=\; \langle a \,|\, v(s)\rangle v(s) + \langle a \,|\, n(s)\rangle n(s) + \langle a \,|\, b(s)\rangle b(s) \;.$$

Für die zweite Gleichung rechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle n'(s)|v(s)\rangle \;&=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underbrace{\langle n(s)|v(s)\rangle}_{=0} - \langle n(s)|v'(s)\rangle \;=\; -\left\langle \tfrac{C''(s)}{|C''(s)|} \,\middle|\, C''(s) \right\rangle \;=\; -|C''(s)| \;=\; -\kappa(s) \\
\langle n'(s)|n(s)\rangle \;&=\; \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle n(s)|n(s)\rangle \;=\; \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}1 \;=\; 0 \\
\langle n'(s)|b(s)\rangle \;&=\; \tau(s) \;.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$n'(s) \;=\; \langle n'(s)|v(s)\rangle v(s) + \langle n'(s)|n(s)\rangle n(s) + \langle n'(s)|b(s)\rangle b(s) \;=\; -\kappa(s) \cdot v(s) + \tau(s) \cdot b(s) \;.$$

Für die dritte Gleichung rechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle b'(s)|v(s)\rangle \;&=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underbrace{\langle b(s)|v(s)\rangle}_{=0} - \langle b(s)|v'(s)\rangle \;=\; -\langle b(s)|\kappa(s) \cdot n(s)\rangle \;=\; 0 \\
\langle b'(s)|n(s)\rangle \;&=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underbrace{\langle b(s)|n(s)\rangle}_{=0} - \langle b(s)|n'(s)\rangle \;=\; -\tau(s) \\
\langle b'(s)|b(s)\rangle \;&=\; \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle b(s)|b(s)\rangle \;=\; \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}1 \;=\; 0 \;.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$b'(s) \;=\; \langle b'(s)|v(s)\rangle v(s) + \langle b'(s)|n(s)\rangle n(s) + \langle b'(s)|b(s)\rangle b(s) \;=\; -\tau(s) \cdot n(s) \;.$$

1.4 Beliebige Parametrisierung: Formeln für die Praxis

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei

$$C \;:\; I \;\to\; \mathbb{R}^3$$

eine beliebig oft differenzierbare Abbildung mit $C'(t) \neq 0$ für $t \in I$.

Dies ist eine reguläre Parametrisierung der Kurve $K := C(I)$, die aber nun nicht mehr als normiert vorausgesetzt wird.

Sei J ein Intervall, sei $u : J \to I$ beliebig oft differenzierbar und bijektiv, mit $u'(t) > 0$ für $t \in I$ und mit $u^{-1} : J \to I$ beliebig oft differenzierbar, dergestalt, daß

$$\tilde{C} \; := \; C \circ u$$

eine normierte Parametrisierung von K ist.

Wir schreiben $w := u^{-1} : I \to J$. Es ist

$$1 \; = \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t \; = \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(w(t)) \; = \; u'(w(t)) \cdot w'(t)$$

und also

$$w'(t) = \frac{1}{u'(w(t))} > 0 \quad \text{für } t \in I \; .$$

Es ist also

$$\tilde{C}(s) \; = \; C(u(s))$$

für $s \in J$. Umgekehrt ist

$$C(t) \; = \; \tilde{C}(w(t))$$

für $t \in I$.

Wir wollen nun die für die normierte Parametrisierung $\tilde{C}(s)$ bekannten Formeln auf die Parametrisierung C umrechnen. Dabei schreiben wir die Begriffe in bezug auf $\tilde{C}$ alle mit einer Tilde, also $\tilde{v}(s)$ für den Tangentenvektor, $\tilde{n}(s)$ für den Normalenvektor, $\tilde{b}(s)$ für den Binormalenvektor, $\tilde{\kappa}(s)$ für die Krümmung, $\tilde{\rho}(s)$ für den Krümmungskreisradius, $\tilde{\tau}(s)$ für die Torsion im Punkt $\tilde{C}(s)$, $\tilde{M}(s)$ für den Krümmungskreismittelpunkt für den Punkt $\tilde{C}(s)$.

Definition. Wir schreiben wie folgt.

$$\begin{array}{rcll}
v(t) & := & \tilde{v}(w(t)) & \text{ist der Tangentenvektor an } K \text{ im Punkt } C(t) \\
n(t) & := & \tilde{n}(w(t)) & \text{ist der Normalenvektor an } K \text{ im Punkt } C(t) \\
b(t) & := & \tilde{b}(w(t)) & \text{ist der Binormalenvektor an } K \text{ im Punkt } C(t) \\
\kappa(t) & := & \tilde{\kappa}(w(t)) & \text{ist die Krümmung von } K \text{ im Punkt } C(t) \\
\rho(t) & := & \tilde{\rho}(w(t)) & \text{ist der Krümmungskreisradius von } K \text{ im Punkt } C(t) \\
\tau(t) & := & \tilde{\tau}(w(t)) & \text{ist die Torsion von } K \text{ im Punkt } C(t) \\
M(t) & := & \tilde{M}(w(t)) & \text{ist der Krümmungskreismittelpunkt für den Punkt } C(t)
\end{array}$$

Bemerkung. Es ist

$$C'(t) \; = \; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{C}(w(t)) \; = \; \tilde{C}'(w(t)) \cdot w'(t) \; .$$

Wegen der Normiertheit von $\tilde{C}'(s)$ folgt nun zunächst

$$|C'(t)| \; = \; |\tilde{C}'(w(t))| \cdot w'(t) \; = \; w'(t) \; .$$

Somit ist

$$w'(t) \;=\; |C'(t)| \;.$$

Damit folgt auch

$$v(t) \;=\; \tilde{v}(w(t)) \;=\; \tilde{C}'(w(t)) \;=\; \frac{1}{w'(t)}\, C'(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)|}\, C'(t) \;.$$

Somit ist

$$\boxed{v(t) \;=\; \tfrac{C'(t)}{|C'(t)|}} \;.$$

der Tangentenvektor an K im Punkt $C(t)$.

Bemerkung. Es ist

$$\begin{aligned} C''(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{C}'(w(t)) \cdot w'(t)) \\ &= \tilde{C}''(w(t)) \cdot w'(t)^2 + \tilde{C}'(w(t)) \cdot w''(t) \;. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \kappa(t) \cdot n(t) &= \tilde{\kappa}(w(t)) \cdot \tilde{n}(w(t)) \\ &= \tilde{C}''(w(t)) \\ &= \tfrac{1}{w'(t)^2} \Big(C''(t) - \tilde{C}'(w(t)) \cdot w''(t) \Big) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \tfrac{1}{w'(t)^2}\, C''(t) - \tfrac{w''(t)}{w'(t)^3}\, C'(t) \;. \end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt mit $v(t)$ liefert hieraus

$$\begin{aligned} \kappa(t) \cdot b(t) &= \tilde{\kappa}(w(t)) \cdot \tilde{b}(w(t)) \\ &= \tilde{v}(w(t)) \times (\tilde{\kappa}(w(t)) \cdot \tilde{n}(w(t))) \\ &= v(t) \times (\kappa(t) \cdot n(t)) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \tfrac{1}{w'(t)}\, C'(t) \times \Big(\tfrac{1}{w'(t)^2}\, C''(t) - \tfrac{w''(t)}{w'(t)^3}\, C'(t) \Big) \\ &= \tfrac{1}{w'(t)^3}\, C'(t) \times C''(t) \;. \end{aligned}$$

Wir nehmen auf beiden Seiten die Länge und beachten dabei $|b(t)| = 1$.

Somit ist

$$\boxed{\kappa(t) \;=\; \tfrac{1}{|C'(t)|^3}\, |C'(t) \times C''(t)|}$$

die Krümmung von K im Punkt $C(t)$.

Daraus folgt

$$n(t) \;=\; \tfrac{1}{\kappa(t)}\, n(t) \cdot \kappa(t) \;=\; \tfrac{w'(t)^3}{|C'(t) \times C''(t)|}\, \kappa(t) \cdot n(t) \;,$$

worin wir obigen Ausdruck für $\kappa(t) \cdot n(t)$ einsetzen und

$$n(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|} (w'(t) C''(t) - w''(t) C'(t))$$

erhalten.

Somit ist

$$\boxed{n(t) \;=\; \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|}(|C'(t)|C''(t) - |C'(t)|'C'(t))}$$

der Normalenvektor von K im Punkt $C(t)$.

Für den Krümmungskreis im Punkt $C(t)$ erhalten wir den Krümmungskreisradius

$$\boxed{\rho(t) = \kappa(t)^{-1} \;=\; \tfrac{|C'(t)|^3}{|C'(t)\times C''(t)|}}$$

und den Krümmungskreismittelpunkt

$$\boxed{M(t) \;=\; C(t) + n(t)\cdot\rho(t)}$$

Der *Krümmungskreis* selbst ist parametrisiert durch

$$\varphi \;\mapsto\; M(t) - n(t)\rho(t)\cos(\varphi) + v(t)\rho(t)\sin(\varphi)$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Ferner ist

$$\boxed{b(t) \;=\; v(t)\times n(t)}$$

der Binormalenvektor von K im Punkt $C(t)$.

Alternativ ist auch

$$\boxed{b(t) \;=\; \tfrac{C'(t)\times C''(t)}{|C'(t)\times C''(t)|}}\;.$$

Dies folgt aus obiger Berechnung von $\kappa(t)\cdot b(t)$ und $\kappa(t)$.

Beispiel. Seien p, $q > 0$. Es parametrisiert

$$C \;:\; [0, 2\pi] \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; t \;\mapsto\; C(t) = \left(\begin{smallmatrix} p\cos(t) \\ q\sin(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

eine Ellipse in der x_1-x_2-Ebene mit Halbachsen p auf der x_1-Achse und q auf der x_2-Achse.

Es ist $C'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -p\sin(t) \\ q\cos(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und also

$$|C'(t)| \;=\; \sqrt{p^2\sin(t)^2 + q^2\cos(t)^2} \;=\; \sqrt{(p^2-q^2)\sin(t)^2 + q^2}$$

Vgl. §1.1.

Es ist $C''(t) = \left(\begin{smallmatrix} -p\cos(t) \\ -q\sin(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Somit wird

$$|C'(t)\times C''(t)| \;=\; \left|\left(\begin{smallmatrix} -p\sin(t) \\ q\cos(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix} -p\cos(t) \\ -q\sin(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right| \;=\; \left|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ pq\sin(t)^2+pq\cos(t)^2 \end{smallmatrix}\right)\right| \;=\; \left|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ pq \end{smallmatrix}\right)\right| \;=\; pq\,,$$

und also

$$\kappa(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)|^3}|C'(t)\times C''(t)| = \frac{pq}{(p^2\sin(t)^2+q^2\cos(t)^2)^{3/2}}\;.$$

Für $t = 0$, also im Punkt $C(0) = \left(\begin{smallmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, ergibt sich damit $\kappa(0) = \frac{pq}{(q^2)^{3/2}} = \frac{p}{q^2}$. Der Krümmungskreisradius ist dort also

$$\rho(0) \;=\; \kappa(0)^{-1} \;=\; \frac{q^2}{p}\;.$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$, also im Punkt $C(\frac{\pi}{2}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, ergibt sich damit $\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{pq}{(p^2)^{3/2}} = \frac{q}{p^2}$. Der Krümmungskreisradius ist dort also

$$\rho(\tfrac{\pi}{2}) \;=\; \kappa(\tfrac{\pi}{2})^{-1} \;=\; \frac{p^2}{q}\;.$$

Bemerkung. Sind

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto p(t) &= \left(\begin{smallmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{smallmatrix}\right) \\ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto q(t) &= \left(\begin{smallmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

differenzierbare vektorwertige Abbildungen, dann wird

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\times q(t)) \;&=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{smallmatrix} p_2(t)q_3(t)-p_3(t)q_2(t) \\ p_3(t)q_1(t)-p_1(t)q_3(t) \\ p_1(t)q_2(t)-p_2(t)q_1(t) \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; \left(\begin{smallmatrix} p_2'(t)q_3(t)+p_2(t)q_3'(t)-p_3'(t)q_2(t)-p_3(t)q_2'(t) \\ p_3'(t)q_1(t)+p_3(t)q_1'(t)-p_1'(t)q_3(t)-p_1(t)q_3'(t) \\ p_1(t)q_2(t)+p_1(t)q_2(t)-p_2'(t)q_1(t)-p_2(t)q_1'(t) \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; \left(\begin{smallmatrix} p_2'(t)q_3(t)-p_3'(t)q_2(t) \\ p_3'(t)q_1(t)-p_1'(t)q_3(t) \\ p_1'(t)q_2(t)-p_2'(t)q_1(t) \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} p_2(t)q_3'(t)-p_3(t)q_2'(t) \\ p_3(t)q_1'(t)-p_1(t)q_3'(t) \\ p_1(t)q_2(t)-p_2'(t)q_1'(t) \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; p'(t)\times q(t) \;+\; p(t)\times q'(t)\;. \end{aligned}$$

Die Produktregel gilt also in dieser Form auch für das Kreuzprodukt.

Bemerkung. Die Torsion ergibt sich zu:

$$\boxed{\tau(t) \;=\; \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|^2}\;\det(C'(t), C''(t), C'''(t))\;.}$$

Hierbei bezeichnet $(C'(t), C''(t), C'''(t))$ die Matrix mit den Spalten $C'(t)$, $C''(t)$, $C'''(t)$.

Denn zunächst ist $\tilde{n}(s) = \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s)$ und

$$\tilde{b}(s) \;=\; \tilde{v}(s)\times\tilde{n}(s) \;=\; \tilde{C}'(s)\times\tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s)\;.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(s) &= \langle\, \tilde{n}'(s) \,|\, \tilde{b}(s) \,\rangle \\
&= \langle\, \tilde{n}(s) \,|\, \tilde{b}(s) \,\rangle' - \langle\, \tilde{b}'(s) \,|\, \tilde{n}(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tilde{b}'(s) \,|\, \tilde{n}(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\tilde{C}'(s) \times \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s)) \,|\, \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tilde{C}''(s) \times \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) + \tilde{C}'(s) \times (\tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s))' \,|\, \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tilde{C}'(s) \times (\tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s))' \,|\, \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tilde{C}'(s) \times \tilde{\rho}(s)'\tilde{C}''(s) + \tilde{C}'(s) \times \tilde{\rho}(s)\tilde{C}'''(s) \,|\, \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\langle\, \tilde{C}'(s) \times \tilde{\rho}(s)\tilde{C}'''(s) \,|\, \tilde{\rho}(s)\tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\tilde{\rho}(s)^2 \langle\, \tilde{C}'(s) \times \tilde{C}'''(s) \,|\, \tilde{C}''(s) \,\rangle \\
&= -\tilde{\rho}(s)^2 \langle\, \tilde{C}''(s) \,|\, \tilde{C}'(s) \times \tilde{C}'''(s) \,\rangle \\
&\overset{\textbf{[3, }\S 3.11\textbf{]}}{=} -\tilde{\rho}(s)^2 \det(\tilde{C}''(s), \tilde{C}'(s), \tilde{C}'''(s)) \\
&= \tilde{\rho}(s)^2 \det(\tilde{C}'(s), \tilde{C}''(s), \tilde{C}'''(s)) \;.
\end{aligned}$$

Ferner war

$$\begin{aligned}
C(t) &= \tilde{C}(w(t)) \\
C'(t) &= \tilde{C}'(w(t)) \cdot w'(t) \\
C''(t) &= \tilde{C}''(w(t)) \cdot w'(t)^2 + \tilde{C}'(w(t)) \cdot w''(t) \;.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
C'''(t) &= \tilde{C}'''(w(t)) \cdot w'(t)^3 + \tilde{C}''(w(t)) \cdot 2w'(t)w''(t) + \tilde{C}''(w(t)) \cdot w'(t) \cdot w''(t) + \tilde{C}'(w(t)) \cdot w'''(t) \\
&= \tilde{C}'''(w(t)) \cdot w'(t)^3 + 3\tilde{C}''(w(t)) \cdot w'(t)w''(t) + \tilde{C}'(w(t)) \cdot w'''(t) \;.
\end{aligned}$$

Da Determinanten mit gleichen Spalten null sind, wird

$$\det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \;=\; w'(t)^6 \cdot \det(\tilde{C}'(t), \tilde{C}''(t), \tilde{C}'''(t)) \;.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \tilde{\tau}(w(t)) \\
&= \tilde{\rho}(w(t))^2 \det(\tilde{C}'(w(t)), \tilde{C}''(w(t)), \tilde{C}'''(w(t))) \\
&= \tilde{\rho}(w(t))^2 w'(t)^{-6} \cdot \det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \\
&= \tfrac{1}{(\kappa(t)|C'(t)|^3)^2} \cdot \det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \\
&= \tfrac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot \det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \;.
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Flächen im Raum und ihre Kurven

2.1 Parametrisierungen

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ([1]). Sei

$$\Phi \ : \ U \to \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{smallmatrix}\right)$$

wobei Φ_1, Φ_2, Φ_3 im Innern von U beliebig oft differenzierbar seien.

Seien im Innern von U stets Φ_u und Φ_v linear unabhängig.

Dann heißt Φ eine reguläre Parametrisierung der Fläche $S := \Phi(U)$.

Wir schreiben $\Phi_u(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} \Phi_{1,u}(u,v) \\ \Phi_{2,u}(u,v) \\ \Phi_{3,u}(u,v) \end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_v(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} \Phi_{1,v}(u,v) \\ \Phi_{2,v}(u,v) \\ \Phi_{3,v}(u,v) \end{smallmatrix}\right)$ für die partiellen Ableitungen von Φ nach u und nach v.

Man kann sich U als "Landkarte" von S denken.

Beispiel. Es ist $\Phi \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Parametrisierung der x_1-x_2-Ebene.

Beispiel. Sei $R > 0$. Sei $U = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Es ist

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = R \left(\begin{smallmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{smallmatrix}\right)$$

eine Parametrisierung der Kugel

$$S \ = \ \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \} \ .$$

[1] Es sollte $U^\circ \subseteq U \subseteq \overline{U^\circ}$ sein.

Definition. In Abhängigkeit von der betrachteten Parametrisierung Φ setzen wir

$$\begin{array}{lllllll} E & = & E(u,v) & = & \langle\, \Phi_u(u,v) \,|\, \Phi_u(u,v) \,\rangle & = & |\Phi_u(u,v)|^2 \\ F & = & F(u,v) & = & \langle\, \Phi_u(u,v) \,|\, \Phi_v(u,v) \,\rangle & & \\ G & = & G(u,v) & = & \langle\, \Phi_v(u,v) \,|\, \Phi_v(u,v) \,\rangle & = & |\Phi_v(u,v)|^2 \;. \end{array}$$

Dies sind die klassischen Bezeichnungen.

Bemerkung. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $c : I \to U : t \mapsto c(t) = \left(\begin{smallmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{smallmatrix}\right)$ beliebig oft differenzierbar, mit $c'(t) \neq 0$ stets.

Dann ist

$$C := \Phi \circ c \;:\; I \to \mathbb{R}^3 \;:\; t \mapsto C(t) = \Phi(c(t)) = \left(\begin{smallmatrix} \Phi_1(c_1(t),c_2(t)) \\ \Phi_2(c_1(t),c_2(t)) \\ \Phi_3(c_1(t),c_2(t)) \end{smallmatrix}\right)$$

eine Parametrisierung einer Kurve $K = \Phi(c(I))$ auf der Fläche $S = \Phi(U)$.

> Man kann sich c als Parametrisierung des Wegs $c(I)$ auf der "Landkarte" U denken, und $C = \Phi \circ c$ dann als Parametrisierung des "tatsächlichen Wegs" $K = \Phi(c(I))$ auf $S = \Phi(U)$.

Seien $a,\, b \in I$ mit $a \leqslant b$. Das Kurvenstück $C([a,b])$ hat die Länge $\int_a^b |C'(t)| \,\mathrm{d}t$.

Dabei wird mit der Kettenregel im Mehrdimensionalen

$$C'(t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(c_1(t),c_2(t)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(c_1(t),c_2(t)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3(c_1(t),c_2(t)) \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \Phi_{1,u}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_1'(t) + \Phi_{1,v}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_2'(t) \\ \Phi_{2,u}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_1'(t) + \Phi_{2,v}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_2'(t) \\ \Phi_{3,u}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_1'(t) + \Phi_{3,v}(c_1(t),c_2(t))\cdot c_2'(t) \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Mithin ist

$$\begin{array}{ll} & |C'(t)|^2 \\ = & \Phi_{1,u}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_1'(t)^2 + 2\Phi_{1,u}(c_1(t),c_2(t))\Phi_{1,v}(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)c_2'(t) + \Phi_{1,v}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_2'(t)^2 \\ + & \Phi_{2,u}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_1'(t)^2 + 2\Phi_{2,u}(c_1(t),c_2(t))\Phi_{2,v}(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)c_2'(t) + \Phi_{2,v}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_2'(t)^2 \\ + & \Phi_{3,u}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_1'(t)^2 + 2\Phi_{3,u}(c_1(t),c_2(t))\Phi_{3,v}(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)c_2'(t) + \Phi_{3,v}(c_1(t),c_2(t))^2 \cdot c_2'(t)^2 \\ = & |\Phi_u(c_1(t),c_2(t))|^2 \cdot c_1'(t)^2 + 2\langle\, \Phi_u(c_1(t),c_2(t)) \,|\, \Phi_v(c_1(t),c_2(t)) \,\rangle \cdot c_1'(t)c_2'(t) + |\Phi_v(c_1(t),c_2(t))|^2 \cdot c_2'(t)^2 \\ = & E(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)^2 + 2F(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)c_2'(t) + G(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_2'(t)^2 \\ = & c'^{\,\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c' \;, \end{array}$$

wobei in der letzten Zeile $c' = c'(t)$, $E = E(c_1(t),c_2(t))$, $F = F(c_1(t),c_2(t))$ und $G = G(c_1(t),c_2(t))$ zu lesen ist.

Somit wird die Länge des Kurvenstücks $C([a,b]) = \Phi(c([a,b]))$ zu

$$\int_a^b |C'(t)| \,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \sqrt{E(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)^2 + 2F(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_1'(t)c_2'(t) + G(c_1(t),c_2(t)) \cdot c_2'(t)^2} \;\mathrm{d}t \;.$$

Kurz also zu $\int_a^b |C'(t)|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{E \cdot {c'_1}^2 + 2F \cdot c'_1 c'_2 + G \cdot {c'_2}^2}\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{c'^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'}\ \mathrm{d}t$.

Bemerkung. Für $a,\, b \in \mathbb{R}^3$ ist gemäß **[3,** 2.10.3**]**

$$|a \times b|^2 \;=\; |a|^2 \cdot |b|^2 - \langle\, a \,|\, b \,\rangle^2 \;.$$

Also ist bei uns

$$|\Phi_u \times \Phi_v|^2 \;=\; |\Phi_u|^2 \cdot |\Phi_v|^2 - \langle\, \Phi_u \,|\, \Phi_v \,\rangle^2 \;=\; EG - F^2 \;.$$

Bemerkung. Sei $J \subseteq U$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs der Parametrisierung Φ.
Dann ist $\Phi(J) \subseteq \Phi(U) = S$ eine Teilmenge der Fläche S.
Es ist der Flächeninhalt von $\Phi(J)$ gleich

$$\iint_J |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \;=\; \iint_J \sqrt{E(u,v) \cdot G(u,v) - F(u,v)^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \;=\; \iint_J \sqrt{\det\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \;,$$

wobei im letzten Ausdruck $E = E(u,v)$, $F = F(u,v)$ und $G = G(u,v)$ zu lesen ist.

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) \;=\; R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel von Radius R.
Es ist $\Phi_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_\vartheta = R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$. Also wird

$$\begin{array}{lclcl} E & = & |\Phi_\varphi|^2 & = & R^2 \sin(\vartheta)^2 \\ F & = & \langle \Phi_\varphi | \Phi_\vartheta \rangle & = & 0 \\ G & = & |\Phi_\vartheta|^2 & = & R^2 \;. \end{array}$$

Insbesondere ist

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Sei $\vartheta_0 \in [0, \pi]$. Sei $c(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$. Es parametrisiert $C(\varphi) := \Phi(c(\varphi)) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta_0)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta_0) \end{pmatrix}$ einen Kreis K_{ϑ_0} auf der Kugel, namentlich den Schnitt mit $x_3 = \cos(\vartheta_0)$.
Es ist $c'(\varphi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Die Länge des Kreises K_{ϑ_0} wird

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{c'^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'}\ \mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\ \mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin(\vartheta_0)^2}\ \mathrm{d}\varphi \;=\; 2\pi R \sin(\vartheta_0) \;.$$

Da der Radius von K_{ϑ_0} gleich $R\sin(\vartheta_0)$ ist, folgt dies auch direkt.

Bemerkung (Winkelmessung).

Wir betrachten weiterhin die Parametrisierung $\Phi : U \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix}$ der Fläche $S = \Phi(U)$.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $c : I \to U : t \mapsto c(t) = \binom{c_1(t)}{c_2(t)}$ beliebig oft differenzierbar, mit $c'(t) \neq 0$ stets. Wir betrachten die Parametrisierung

$$C(t) \;:=\; \Phi(c(t))$$

der Kurve $K = C(I)$. Es ist $C'(t) = \mathrm{J}\Phi(c(t)) \cdot c'(t)$, was wir auch kurz $C' = \mathrm{J}\Phi \cdot c'$ schreiben.

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $d : J \to U : t \mapsto d(t) = \binom{d_1(t)}{d_2(t)}$ beliebig oft differenzierbar, mit $d'(t) \neq 0$ stets. Wir betrachten die Parametrisierung

$$D(t) \;:=\; \Phi(d(t))$$

der Kurve $L = D(J)$. Es ist $D'(t) = \mathrm{J}\Phi(d(t)) \cdot d'(t)$, was wir auch kurz $D' = \mathrm{J}\Phi \cdot d'$ schreiben.

Sei $t_0 \in I$ und $t_1 \in J$ mit $c(t_0) = d(t_1) =: p$. Dann schneiden sich die Kurven K und L im Punkt $P := \Phi(p)$.

Sei α der eingeschlossene Winkel der Tangentialvektoren $C'(t_0)$ an K in P und $D'(t_1)$ an L in P.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\langle C'(t_0) | D'(t_1) \rangle}{|C'(t_0)| \cdot |D'(t_1)|} \\
&= \frac{C'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot D'(t_1)}{\sqrt{C'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot C'(t_0)} \cdot \sqrt{D'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot D'(t_1)}} \\
&= \frac{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi \cdot d'(t_1)}{\sqrt{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi \cdot c'(t_0)} \cdot \sqrt{d'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{J}\Phi \cdot d'(t_1)}} \\
&= \frac{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_1)}{\sqrt{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'(t_0)} \cdot \sqrt{d'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_1)}}\,,
\end{aligned}$$

wobei $E = E(p)$, $F = F(p)$, $G = G(p)$ mit $p = c(t_0) = d(t_1)$.

Beispiel. Wir setzen das Beispiel mit der Kugel fort.

Es war $c(\varphi) = \binom{\varphi}{\vartheta_0}$. Es parametrisierte $C(\varphi) = \Phi(c(\varphi))$ den Kreis K_{ϑ_0}.

Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Sei $d(\vartheta) := \binom{\varphi_0}{\vartheta}$. Es parametrisiert $D(\vartheta) := \Phi(d(\vartheta)) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi_0) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi_0) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ einen Halbkreis H_{φ_0} auf der Kugel.

Es ist $d'(\vartheta) = \binom{0}{1}$.

Es schneiden sich K_{ϑ_0} und H_{φ_0} im Punkt $\Phi(\varphi_0, \vartheta_0)$.

Die Kurven schneiden sich im Winkel α, wobei

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_1)}{\sqrt{c'(t_0)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'(t_0)} \cdot \sqrt{d'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_1)}} \\
&= \frac{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \cdot \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_0)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}} \\
&= \frac{0}{R\sin(\vartheta_0) \cdot R} \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Also ist $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$.

2.2 Christoffelsymbole

Sei die Situation von §2.1 gegeben: $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert die Fläche $S = \Phi(U)$.

Dann ist $(\Phi_u, \Phi_v, \Phi_u \times \Phi_v)$ an jeder Stelle $\binom{u}{v}$ im Innern von U linear unabhängig und somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ läßt sich also eindeutig darin als Linearkombination schreiben,

$$
b \;=:\; a_1\Phi_u + a_2\Phi_v + a_3(\Phi_u \times \Phi_v)\;,
$$

was Koeffizienten $a_1,\ a_2,\ a_3\ \in\ \mathbb{R}$ definiert.

Dies wollen wir auf die zweiten partiellen Ableitungen von Φ anwenden.

Definition. Sei $\binom{u}{v}$ im Innern von U.

Wir definieren die *Christoffelsymbole* $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(u, v)$ für $i,\ j,\ k\ \in\ \{1, 2\}$ wie folgt.

Hierbei schreiben wir kurz $\Phi_{uu} = \Phi_{uu}(u, v)$, $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11}(u, v)$, $\Phi_u = \Phi_u(u, v)$, $h_{11} = h_{11}(u, v)$ etc., d.h. es sind alle Größen in Abhängigkeit von $\binom{u}{v} \in U$ zu verstehen.

$$
\begin{aligned}
\Phi_{uu} &=: \Gamma^1_{11}\Phi_u + \Gamma^2_{11}\Phi_v + h_{11}(\Phi_u \times \Phi_v) \\
\Phi_{uv} &=: \Gamma^1_{12}\Phi_u + \Gamma^2_{12}\Phi_v + h_{12}(\Phi_u \times \Phi_v) \\
\Phi_{vv} &=: \Gamma^1_{22}\Phi_u + \Gamma^2_{22}\Phi_v + h_{22}(\Phi_u \times \Phi_v)
\end{aligned}
$$

Da $\Phi_{uv} = \Phi_{vu}$ ist, ergibt die Festlegung

$$
\Phi_{vu} \;=:\; \Gamma^1_{21}\Phi_u + \Gamma^2_{21}\Phi_v + h_{21}(\Phi_u \times \Phi_v)
$$

nichts Neues mehr, sondern nur $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ und $h_{jk} = h_{kj}$ für $i,\, j,\, k \in \{1,2\}$.

Bemerkung. Wir erinnern an $E = \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle$, $F = \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle$, $G = \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle$, alles in Abhängigkeit von $\binom{u}{v} \in U$.

- Es ist $E_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u | \Phi_{uu} \rangle = 2 \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \rangle$. Also ist
$$\langle \Phi_{uu} | \Phi_u \rangle \;=\; \tfrac{1}{2} E_u \;.$$
- Es ist $E_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u | \Phi_{uv} \rangle = 2 \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \rangle$. Also ist
$$\langle \Phi_{uv} | \Phi_u \rangle \;=\; \tfrac{1}{2} E_v \;.$$
- Es ist $G_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{vu} | \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v | \Phi_{vu} \rangle = 2 \langle \Phi_{uv} | \Phi_v \rangle$. Also ist
$$\langle \Phi_{uv} | \Phi_v \rangle \;=\; \tfrac{1}{2} G_u \;.$$
- Es ist $G_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{vv} | \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v | \Phi_{vv} \rangle = 2 \langle \Phi_{vv} | \Phi_v \rangle$. Also ist
$$\langle \Phi_{vv} | \Phi_v \rangle \;=\; \tfrac{1}{2} G_v \;.$$
- Es ist $F_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{uu} | \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u | \Phi_{vu} \rangle = \langle \Phi_{uu} | \Phi_v \rangle + \frac{1}{2} E_v$. Also ist
$$\langle \Phi_{uu} | \Phi_v \rangle \;=\; F_u - \tfrac{1}{2} E_v \;.$$
- Es ist $F_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{uv} | \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u | \Phi_{vv} \rangle = \frac{1}{2} G_u + \langle \Phi_{vv} | \Phi_u \rangle$. Also ist
$$\langle \Phi_{vv} | \Phi_u \rangle \;=\; F_v - \tfrac{1}{2} G_u \;.$$

Lemma. Alle Größen seien in Abhängigkeit von $\binom{u}{v} \in U$ zu verstehen.

Im folgenden findet $\langle \Phi_u \times \Phi_v \,|\, \Phi_u \rangle = 0$ und $\langle \Phi_u \times \Phi_v \,|\, \Phi_v \rangle = 0$ Anwendung.

- Wenden wir $\langle - | \Phi_u \rangle$ auf die erste definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{uu} | \Phi_u \rangle \;=\; \Gamma^1_{11} \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle + \Gamma^2_{11} \langle \Phi_v | \Phi_u \rangle \;,$$
also
$$\tfrac{1}{2} E_u \;=\; \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \;.$$
Wenden wir $\langle - | \Phi_v \rangle$ auf die erste definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{uu} | \Phi_v \rangle \;=\; \Gamma^1_{11} \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle + \Gamma^2_{11} \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \;,$$
also
$$F_u - \tfrac{1}{2} E_v \;=\; \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G \;.$$
Zusammen ist
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} \;,$$
und also
$$\boxed{\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}} \;.$$

- Wenden wir $\langle - | \Phi_u \rangle$ auf die zweite definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{uv} | \Phi_u \rangle \;=\; \Gamma_{12}^1 \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \Phi_v | \Phi_u \rangle \;,$$
also
$$\tfrac{1}{2} E_v \;=\; \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \;.$$
Wenden wir $\langle - | \Phi_v \rangle$ auf die zweite definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{uv} | \Phi_v \rangle \;=\; \Gamma_{12}^1 \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \;,$$
also
$$\tfrac{1}{2} G_u \;=\; \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \;.$$
Somit ist
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} \;,$$
und also
$$\boxed{\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix}} \,.$$

- Wenden wir $\langle - | \Phi_u \rangle$ auf die dritte definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{vv} | \Phi_u \rangle \;=\; \Gamma_{22}^1 \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \Phi_v | \Phi_u \rangle \;,$$
also
$$F_v - \tfrac{1}{2} G_u \;=\; \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \;.$$
Wenden wir $\langle - | \Phi_v \rangle$ auf die dritte definierende Gleichung der Christoffelsymbole an, so erhalten wir
$$\langle \Phi_{vv} | \Phi_v \rangle \;=\; \Gamma_{22}^1 \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \;,$$
also
$$\tfrac{1}{2} G_v \;=\; \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \;.$$
Somit ist
$$\begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} E_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \;,$$
und also
$$\boxed{\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}} \,.$$

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel von Radius R.

Hier ist also $u = \varphi$ und $v = \vartheta$.

Wir erinnern an
$$\begin{array}{rcl} E & = & R^2 \sin(\vartheta)^2 \\ F & = & 0 \\ G & = & R^2 \;. \end{array}$$

Insbesondere ist

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \;=\; R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und also

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \;=\; R^{-2} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\varphi \\ F_\varphi - \frac{1}{2}E_\vartheta \end{pmatrix} \;=\; R^{-2} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\vartheta \\ \frac{1}{2}G_\varphi \end{pmatrix} \;=\; R^{-2} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tan(\vartheta)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_\vartheta - \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}G_\vartheta \end{pmatrix} \;=\; R^{-2} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

2.3 Geodäten

Sei die Situation von §2.1 gegeben: $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert die Fläche $S = \Phi(U)$.

Ferner ist $c : I \to U : t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ mit $c'(t) \neq 0$ stets.

Dann ist

$$C := \Phi \circ c \;:\; I \to \mathbb{R}^3 \;:\; t \mapsto C(t) = \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} \Phi_1(c_1(t), c_2(t)) \\ \Phi_2(c_1(t), c_2(t)) \\ \Phi_3(c_1(t), c_2(t)) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung einer Kurve K auf der Fläche $S = \Phi(U)$.

Wir schreiben kurz $c = c(t)$ und $C = C(t)$. Diese Größen seien also in Abhängigkeit von $t \in I$ zu verstehen.

Der Normalenvektor an der Stelle C an diese Kurve K ist gegeben durch

$$n(t) \;=\; n \;=\; \frac{1}{|C' \times C''|}(|C'|C'' - |C'|'C') ,$$

ebenfalls in Abhängigkeit von t; vgl. §1.4. Nun ist

$$|C'|' \;=\; (\sqrt{\langle C'|C'\rangle})' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\langle C'|C'\rangle}} \cdot 2\langle C'|C''\rangle \;=\; \frac{\langle C'|C''\rangle}{|C'|} .$$

Also wird

$$n = \frac{1}{|C' \times C''| \cdot |C'|}(\langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C') .$$

Wir schreiben kurz $\Phi = \Phi(c(t))$, $\Phi_u = \Phi_u(c(t))$ und $\Phi_v = \Phi_v(c(t))$.

Definition. Es ist die Kurve $K = C(I) = \Phi(c(I))$ eine *Geodäte* auf der Fläche $S = \Phi(U)$, falls

$$\langle n|\Phi_u\rangle \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \langle n|\Phi_v\rangle \;=\; 0$$

ist für $t \in I$.

Mit anderen Worten, der Normalenvektor n der Kurve soll senkrecht stehen auf den beiden Tangentialvektoren Φ_u und Φ_v.

Abermals mit anderen Worten, der Normalenvektor n der Kurve soll senkrecht stehen auf der Fläche S.

An Stellen, an denen die Krümmung $\kappa = \frac{|C' \times C''|}{|C'|^3}$ von K gleich 0 ist und also kein Normalenvektor ausgezeichnet werden kann, ist auch

$$\begin{array}{rcl} |\langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C'|^2 & = & \langle\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \,|\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \rangle \\ & = & |C'|^2(|C'|^2|C''|^2 - \langle C'|C''\rangle^2) \\ & = & |C'|^2 \cdot |C' \times C''|^2 \; = \; 0 \,. \end{array}$$

Wollen wir diese Stellen nicht ausschließen, so lautet die Bedingung für eine Geodäte also, es sollen

$$\langle\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \,|\, \Phi_u \,\rangle \; = \; 0 \qquad \text{und} \qquad \langle\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \,|\, \Phi_v \,\rangle \; = \; 0$$

sein für $t \in I$.

Bemerkung. Seien zwei Punkte P und Q auf S gegeben. Die kürzeste Verbindungskurve von P nach Q auf S verläuft auf einer Geodäten.

Bemerkung. Unsere Aufgabe ist nun, diese Geodäten-Bedingung ausgehend von c zu formulieren.

Schritt 1. Nach Ketten- und Produktregel wird

$$\begin{array}{rcl} C' & = & \Phi_u c_1' + \Phi_v c_2' \\ C'' & = & \quad (\Phi_{uu} c_1' + \Phi_{uv} c_2') c_1' + \Phi_u c_1'' \\ & & +(\Phi_{vu} c_1' + \Phi_{vv} c_2') c_2' + \Phi_v c_2'' \\ & = & \Phi_u c_1'' + \Phi_v c_2'' + \Phi_{uu} {c_1'}^2 + 2\Phi_{uv} c_1' c_2' + \Phi_{vv} {c_2'}^2 \,. \end{array}$$

Schritt 2. Wir schreiben kurz $E = E(c(t))$, $F = F(c(t))$, $G = G(c(t))$.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} \langle C'|\Phi_u\rangle & = & \langle \Phi_u|\Phi_u\rangle c_1' + \langle \Phi_v|\Phi_u\rangle c_2' \\ & = & E c_1' + F c_2' \\ \langle C'|\Phi_v\rangle & = & \langle \Phi_u|\Phi_v\rangle c_1' + \langle \Phi_v|\Phi_v\rangle c_2' \\ & = & F c_1' + G c_2' \,. \end{array}$$

Also

$$\begin{pmatrix} \langle C'|\Phi_u\rangle \\ \langle C'|\Phi_v\rangle \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' \,.$$

Schritt 3. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \langle C''|\Phi_u\rangle & = & \langle \Phi_u|\Phi_u\rangle c_1'' + \langle \Phi_v|\Phi_u\rangle c_2'' + \langle \Phi_{uu}|\Phi_u\rangle {c_1'}^2 + 2\langle \Phi_{uv}|\Phi_u\rangle c_1' c_2' + \langle \Phi_{vv}|\Phi_u\rangle {c_2'}^2 \\ \langle C''|\Phi_v\rangle & = & \langle \Phi_u|\Phi_v\rangle c_1'' + \langle \Phi_v|\Phi_v\rangle c_2'' + \langle \Phi_{uu}|\Phi_v\rangle {c_1'}^2 + 2\langle \Phi_{uv}|\Phi_v\rangle c_1' c_2' + \langle \Phi_{vv}|\Phi_v\rangle {c_2'}^2 \,. \end{array}$$

Aus der Definition der Christoffelsymbole in §2.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle\Phi_{uu}|\Phi_u\rangle &= \Gamma^1_{11}\langle\Phi_u|\Phi_u\rangle + \Gamma^2_{11}\langle\Phi_v|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{uv}|\Phi_u\rangle &= \Gamma^1_{12}\langle\Phi_u|\Phi_u\rangle + \Gamma^2_{12}\langle\Phi_v|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{vv}|\Phi_u\rangle &= \Gamma^1_{22}\langle\Phi_u|\Phi_u\rangle + \Gamma^2_{22}\langle\Phi_v|\Phi_u\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle\Phi_{uu}|\Phi_v\rangle &= \Gamma^1_{11}\langle\Phi_u|\Phi_v\rangle + \Gamma^2_{11}\langle\Phi_v|\Phi_v\rangle\\ \langle\Phi_{uv}|\Phi_v\rangle &= \Gamma^1_{12}\langle\Phi_u|\Phi_v\rangle + \Gamma^2_{12}\langle\Phi_v|\Phi_v\rangle\\ \langle\Phi_{vv}|\Phi_v\rangle &= \Gamma^1_{22}\langle\Phi_u|\Phi_v\rangle + \Gamma^2_{22}\langle\Phi_v|\Phi_v\rangle\ .\end{aligned}$$

Kurz,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uu}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{uu}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\langle\Phi_{uv}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{uv}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\langle\Phi_{vv}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{vv}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Wir schreiben die symmetrischen Matrizen

$$\begin{aligned}\Gamma^1 &:= \begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}\\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22}\end{pmatrix}\\ \Gamma^2 &:= \begin{pmatrix}\Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}\\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\langle C''|\Phi_u\rangle\\ \langle C''|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c'' + \begin{pmatrix}\langle\Phi_{uu}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{uu}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix}{c'_1}^2 + 2\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uv}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{uv}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix}c'_1c'_2 + \begin{pmatrix}\langle\Phi_{vv}|\Phi_u\rangle\\ \langle\Phi_{vv}|\Phi_v\rangle\end{pmatrix}{c'_2}^2\\ &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\left(c'' + \begin{pmatrix}\Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11}\end{pmatrix}{c'_1}^2 + 2\begin{pmatrix}\Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12}\end{pmatrix}c'_1c'_2 + \begin{pmatrix}\Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}{c'_2}^2\right)\\ &= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\left(c'' + \begin{pmatrix}{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^1c'\\ {c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^2c'\end{pmatrix}\right)\ .\end{aligned}$$

Schritt 4. Es ist

$$\langle C'|C'\rangle = \langle\Phi_uc'_1+\Phi_vc'_2|\Phi_uc'_1+\Phi_vc'_2\rangle = {c'_1}^2\langle\Phi_u|\Phi_u\rangle+2c'_1c'_2\langle\Phi_u|\Phi_v\rangle+{c'_2}^2\langle\Phi_v|\Phi_v\rangle = {c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c'\ .$$

Dank Produktregel wird

$$\langle C'|C'\rangle' = \langle C'|C''\rangle + \langle C''|C'\rangle = 2\langle C'|C''\rangle$$

Dank Produkt- und Kettenregel wird

$$\langle C'|C'\rangle' = {c''}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c'+{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c''+{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E' & F'\\ F' & G'\end{pmatrix}c' = 2{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c''+{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_uc'_1+E_vc'_2 & F_uc'_1+F_vc'_2\\ F_uc'_1+F_vc'_2 & G_uc'_1+G_vc'_2\end{pmatrix}c'\ .$$

Somit wird

$$\langle C'|C''\rangle = \tfrac{1}{2}\langle C'|C'\rangle' = {c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}c'' + \tfrac{1}{2}\,{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{pmatrix}c'\cdot c'_1 + \tfrac{1}{2}\,{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{pmatrix}c'\cdot c'_2\ .$$

Schritt 5. Die Geodäten-Bedingung wird

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\langle\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \mid \Phi_u \,\rangle\\ \langle\, \langle C'|C'\rangle C'' - \langle C'|C''\rangle C' \mid \Phi_v \,\rangle\end{pmatrix}\\
&= \langle C'|C'\rangle \begin{pmatrix}\langle C''|\Phi_u\rangle\\ \langle C''|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} - \langle C'|C''\rangle \begin{pmatrix}\langle C'|\Phi_u\rangle\\ \langle C'|\Phi_v\rangle\end{pmatrix}\\
&\overset{\text{Schr. } 3,2}{=} \langle C'|C'\rangle \cdot \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) \left(c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix}\right) - \langle C'|C''\rangle \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'\\
&\overset{\text{Schr. } 4}{=} c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c' \cdot \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) \left(c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix}\right)\\
&\quad - \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_2'\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)^{-1}$ gibt

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c' \cdot \left(c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix}\right) - \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_2'\right) \cdot c' \,.$$

Division durch $c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'$ liefert die Geodäten-Bedingung in folgender Form:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_2'\right) \cdot c' \,.$$

Wir halten fest:

Lemma. Es ist die Kurve $K = C(I) = \Phi(c(I))$ genau dann eine Geodäte auf der Fläche $S = \Phi(U)$, falls

$$\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_2'\right) \cdot c'}$$

ist für $t \in I$.

Hierbei enthalten die symmetrischen Matrizen $\mathsf{\Gamma}^1 = \begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}\\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22}\end{pmatrix}$ und $\mathsf{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix}\Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}\\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}$ die Christoffelsymbole; vgl. §2.2.

Es ist hierbei alles an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix}u\\ v\end{smallmatrix}\right) = c(t)$ zu lesen, also $E = E(c(t))$, $F = F(c(t))$, $G = G(c(t))$, $E_u = E_u(c(t))$, $F_u = F_u(c(t))$, $G_u = G_u(c(t))$, $E_v = E_v(c(t))$, $F_v = F_v(c(t))$, $G_v = G_v(c(t))$, $\Gamma^1 = \Gamma^1(c(t))$ und $\Gamma^2 = \Gamma^2(c(t))$.

Bemerkung. Es ist genau dann $C = \Phi \circ c$ eine normierte Parametrisierung einer Geodäten, wenn $|C'| = 1$ und $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c'' + \begin{pmatrix}c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix}$ erfüllt ist für $t \in I$.

Denn ein Vergleich mit Schritt 3 im vorstehenden Lemma gibt, daß letzteres genau dann der Fall ist, wenn $\langle C''|\Phi_u\rangle = 0$ und $\langle C''|\Phi_v\rangle = 0$ gelten für $t \in I$. Diesenfalls ist aber $n = \frac{C''}{|C''|}$. Also ist dies äquivalent zu $\langle n|\Phi_u\rangle = 0$ und $\langle n|\Phi_v\rangle = 0$. Das wiederum ist die definierende Bedinungung an eine Geodäte.

So findet man die Bedingung häufig in der Literatur. Wenn man nun aber testen will, ob eine Kurve eine Geodäte ist, dann verlangt diese Form der Bedingung, c so anzugeben, daß für $C = \Phi \circ c$ dann $|C'|$ konstant ist. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn C eine normierte Parametrisierung ist. Das ist aber nicht so einfach zu erreichen.

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel von Radius R.

Hier ist also $u = \varphi$ und $v = \vartheta$.

Wir erinnern an

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

und an

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma^2 &= \begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Vgl. letztes Beispiel in §2.2.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_\vartheta & F_\vartheta \\ F_\vartheta & G_\vartheta \end{pmatrix} &= 2R^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(1) Sei $\vartheta_0 \in (0, \pi)$ fixiert.

Sei $c(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$. Es ist also hier $t = \varphi \in [0, 2\pi]$.

Anschaulich ist $K = \Phi(c([0, 2\pi]))$ ein Breitenkreis.

Es ist $c'(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c''(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung erhalten wir

$$\begin{aligned} & c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_\vartheta & F_\vartheta \\ F_\vartheta & G_\vartheta \end{pmatrix} c' \cdot c_2' \right) \cdot c' \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\vartheta_0)\cos(\vartheta_0) \end{pmatrix} - \frac{1}{R^2 \sin(\vartheta_0)^2} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \frac{1}{2} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_\vartheta & F_\vartheta \\ F_\vartheta & G_\vartheta \end{pmatrix} c' \cdot 0 \right) \cdot c' \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\vartheta_0)\cos(\vartheta_0) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dies ist genau dann gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$, wenn $\sin(\vartheta_0)\cos(\vartheta_0) = 0$ ist, d.h. wenn $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ist.

Anschaulich, unter den Breitenkreisen ist nur Äquator eine Geodäte.

(2) Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ fixiert.

Sei $c(\vartheta) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$. Es ist also hier $t = \vartheta \in [0, \pi]$.

Anschaulich ist $K = \Phi(c([0, \pi]))$ ein Längenhalbkreis.

Es ist $c'(\vartheta) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $c''(\vartheta) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung erhalten wir

$$\begin{array}{rl} & c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'' + \frac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_1 + \frac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_\vartheta & F_\vartheta \\ F_\vartheta & G_\vartheta \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\ = & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{R^2} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) c' \cdot 0 + \frac{1}{2}\, 0 \cdot 1 \right) \cdot c' \\ = & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) . \end{array}$$

Für jedes $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ ist dies gleich $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $\vartheta \in [0, \pi]$.

Anschaulich, die Längenhalbkreise sind Geodäten.

Beispiel. Es parametrisiert $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix}$ für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in U = \mathbb{R}^2$ ein hyperbolisches Paraboloid $P = \Phi(U)$.

Es ist $\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ und $\Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{array}{rcrcl} E & = & \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle & = & 1 + u^2 \\ F & = & \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle & = & -uv \\ G & = & \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle & = & 1 + v^2 \end{array}$$

Mit $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix}$ ist $\det \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = 1 + u^2 + v^2$ und $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$.

Desweiteren ist $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2u & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix}$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ -u & 2v \end{pmatrix}$

Also wird

$$\begin{array}{rclclcl} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} & = & \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} & = & \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} & = & \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} & = & \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} & = & \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} & = & \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} & = & \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix} & = & \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix} . \end{array}$$

Somit ist

$$\Gamma^1 = \frac{u}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \qquad \Gamma^2 = \frac{v}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Sei $v_0 \in \mathbb{R}$ fixiert.

Sei $c(u) = \binom{u}{v_0}$ für $u \in \mathbb{R}$. Es ist also $t = u$. Wir wollen untersuchen, für welches v_0 die Kurve $K_{v_0} := \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf P ist.

Es ist $c' = c'(u) = \binom{1}{0}$ und $c'' = c''(u) = \binom{0}{0}$.

Bei $\binom{u}{v} = c(u) = \binom{u}{v_0}$ wird, eingesetzt in die Geodäten-Bedingung,

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} \;-\; \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c_2'\right) \cdot c' \\
= \;& \binom{0}{0} + \tfrac{1}{1+u^2+v_0^2} \begin{pmatrix} u \\ -v_0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{1+u^2} \left(0 + \tfrac{1}{2} \cdot 2u \cdot 1 + 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \;& \tfrac{1}{1+u^2+v_0^2} \begin{pmatrix} u \\ -v_0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{1+u^2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \;.
\end{aligned}$$

Dies ergibt genau dann $\binom{0}{0}$ für $u \in \mathbb{R}$, wenn $v_0 = 0$ ist.

Es ist also genau dann K_{v_0} eine Geodäte auf P, wenn $v_0 = 0$ ist.

Beispiel. Sei

$$U \;=\; \{\, \tbinom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0 \,\}$$

die obere Halbebene.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein fest gewählter Parameter.

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ zwar existent, aber uns nicht bekannt.

Sei uns nur $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = v^\alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bekannt für $\binom{u}{v} \in U$.

Sei $I := (0, \pi)$. Sei $c : I \to U : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Es parametrisiert c einen Halbkreis in U.

Wir wollen trotz Unkenntnis von Φ überprüfen, ob die Kurve $K := \Phi(c(I))$ eine Geodäte auf der Fläche $S = \Phi(U)$ ist.

Es ist $c' = c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ und $c'' = c''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$.

Es ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = v^{-\alpha} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Desweiteren ist $\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} = \alpha v^{\alpha-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Also wird

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} &&= v^{-\alpha} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha v^{\alpha-1} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha v^{-1} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} &&= v^{-\alpha} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha v^{\alpha-1} \\ 0 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha v^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} &&= v^{-\alpha} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\alpha v^{\alpha-1} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\alpha v^{-1} \end{pmatrix} \;.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\Gamma^1 \;=\; \frac{1}{2}\alpha v^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^2 \;=\; \frac{1}{2}\alpha v^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Bei $\binom{u}{v} = c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ wird

$$\begin{aligned}
c'^{\,\mathrm{T}}\Gamma^1 c' &= (-\sin(t)\ \ \cos(t))\tfrac{1}{2}\alpha\sin(t)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} &&= -\alpha\cos(t) \\
c'^{\,\mathrm{T}}\Gamma^2 c' &= (-\sin(t)\ \ \cos(t))\tfrac{1}{2}\alpha\sin(t)^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} &&= \tfrac{1}{2}\alpha(-\sin(t) + \cos(t)^2\sin(t)^{-1}) \\
c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' &= (-\sin(t)\ \ \cos(t))\sin(t)^{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} &&= \sin(t)^{\alpha} \\
c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' &= (-\sin(t)\ \ \cos(t))\sin(t)^{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} &&= 0 \\
c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' &= (-\sin(t)\ \ \cos(t))\alpha\sin(t)^{\alpha-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} &&= \alpha\sin(t)^{\alpha-1}\ .
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung wird also

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\,\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\,\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'}\left(c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \tfrac{1}{2}\,c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\,c'^{\,\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c_2'\right) \cdot c' \\
= {} & \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha\cos(t) \\ \frac{1}{2}\alpha(-\sin(t) + \cos(t)^2\sin(t)^{-1}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sin(t)^{\alpha}}\left(0 + 0 + \tfrac{1}{2}\alpha\sin(t)^{\alpha-1}\cos(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\
= {} & \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha\cos(t) \\ \frac{1}{2}\alpha(-\sin(t) + \cos(t)^2\sin(t)^{-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha\cos(t) \\ \frac{1}{2}\alpha\sin(t)^{-1}\cos(t)^2 \end{pmatrix} \\
= {} & \begin{pmatrix} (-1-\frac{\alpha}{2})\cos(t) \\ (-1-\frac{\alpha}{2})\sin(t) \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

Dies verschwindet genau dann für $t \in I$, wenn $\alpha = -2$ ist.

Also ist die Kurve K genau dann eine Geodäte, wenn bei unserer durch $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = v^{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bestimmten Geometrie der Parameter $\alpha = -2$ verwendet wird.

Kapitel 3

Flächen im Raum und ihre Krümmung

3.1 Gaußsche Krümmung einer Fläche

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei

$$\Phi \; : \; U \to \mathbb{R}^3 \; : \; \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v)$$

eine reguläre Parametrisierung der Fläche $S := \Phi(U)$.

Im Punkt $\Phi(u,v)$ spannen $\Phi_u = \Phi_u(u,v)$ und $\Phi_v = \Phi_v(u,v)$ die Tangentialebene auf. Es steht dort $\Phi_u \times \Phi_v$ also senkrecht auf der Tangentialebene.

Wir erinnern an $E = \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle$, $F = \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle$ und $G = \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle$.

Aus §2.2 entnehmen wir

$$\begin{array}{rcl}
\Phi_{uu} & = & \Gamma_{11}^1 \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \Phi_v + h_{11}(\Phi_u \times \Phi_v) \\
\Phi_{uv} & = & \Gamma_{12}^1 \Phi_u + \Gamma_{12}^2 \Phi_v + h_{12}(\Phi_u \times \Phi_v) \\
\Phi_{vu} & = & \Gamma_{21}^1 \Phi_u + \Gamma_{21}^2 \Phi_v + h_{21}(\Phi_u \times \Phi_v) \\
\Phi_{vv} & = & \Gamma_{22}^1 \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \Phi_v + h_{22}(\Phi_u \times \Phi_v) \; ,
\end{array}$$

wobei die zweite und die dritte Gleichung dasselbe besagen. Insbesondere ist $h_{12} = h_{21}$.

Aus §2.1 entnehmen wir $|\Phi_u \times \Phi_v|^2 = EG - F^2 = \det \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix} \right)$.

Wenden wir das Skalarprodukt mit $\Phi_u \times \Phi_v$ auf diese Gleichungen an und beachten wir, daß $\langle \Phi_u | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = 0$ und $\langle \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = 0$ sind, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcccl}
\langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{11} \langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{11}(EG - F^2) \\
\langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{12} \langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{12}(EG - F^2) \\
\langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{22} \langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & = & h_{22}(EG - F^2) \; .
\end{array}$$

Nun dividieren wir noch durch $EG - F^2$ und erhalten das

Lemma. Für $\binom{u}{v} \in U$ ist

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{\langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{\langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle} = \frac{\langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{EG - F^2} \\
h_{12} &= \frac{\langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{\langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle} = \frac{\langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{EG - F^2} \\
h_{22} &= \frac{\langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{\langle \Phi_u \times \Phi_v | \Phi_u \times \Phi_v \rangle} = \frac{\langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle}{EG - F^2} .
\end{aligned}$$

Hierbei sind $h_{11} = h_{11}(u, v)$, $h_{12} = h_{12}(u, v)$ und $h_{22} = h_{22}(u, v)$ für $\binom{u}{v} \in U$ definiert. Weiterhin ist $h_{12} = h_{21}$.

Insgesamt ist also

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_{vu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle & \langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle \end{pmatrix} .$$

Definition. An der Stelle $\binom{u}{v} \in U$, d.h. im Punkt $\Phi(u, v)$, ist die *Gaußsche Krümmung* von S gegeben durch

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u, v) := h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} .$$

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel S von Radius R.

Wir hatten $\Phi_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_\vartheta = R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir haben

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta = R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = -R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Es ist $\Phi_{\varphi\varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_{\varphi\vartheta} = R \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_{\vartheta\vartheta} = R \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{\langle \Phi_{\varphi\varphi} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{EG - F^2} = \frac{R^3 \sin(\vartheta)^3}{R^4 \sin(\vartheta)^2} && = R^{-1}\sin(\vartheta) \\
h_{12} &= \frac{\langle \Phi_{\varphi\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{EG - F^2} && = 0 \\
h_{22} &= \frac{\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{EG - F^2} = \frac{R^3(\sin(\vartheta)^3 + \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2)}{R^4 \sin(\vartheta)^2} && = R^{-1}\sin(\vartheta)^{-1} .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Gaußsche Krümmung

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\varphi, \vartheta) = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R^{-1}\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & R^{-1}\sin(\vartheta)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2} .$$

Die Gaußsche Krümmung ist also auf allen Punkten der Kugel konstant gleich $\frac{1}{R^2}$.

3.2 Flächenkrümmung und Krümmung von Kurven auf der Fläche

Wir behalten die Situation von §3.1 bei.

Sei also $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche $S = \Phi(U)$.

Wir schreiben kurz $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u,v) := \Phi_u \times \Phi_v$.

Wir erinnern an $|\mathfrak{n}| = \sqrt{EG - F^2}$; cf. §2.1.

3.2.1 Kurven auf der Fläche, die normiert parametrisiert sind

Sei $c : I \to U : s \mapsto c(s)$. Wir betrachten die Kurve $K = \Phi(c(I))$, die von $C(s) = \Phi(c(s))$ parametrisiert wird.

Wir setzen voraus, daß $C(s)$ eine normierte Parametrisierung von K ist. Es ist nach Voraussetzung also $|C'(s)| = 1$ für $s \in I$.

Ist $n = n(s)$ der Normalenvektor am Kurvenpunkt $C(s)$, dann ist $n = \frac{C''}{|C''|}$. Für die Krümmung $\kappa = \kappa(s)$ gilt $\kappa = |C''|$. Vgl. §1.2.

Sei $\nu = \nu(s)$ der Winkel, der von $\mathfrak{n}$ und von n eingeschlossen wird.

Wir berechnen nun $\langle C''|\mathfrak{n}\rangle = \langle C''(s)|\mathfrak{n}(c(s))\rangle$ zweimal.

Erste Berechnung. Es wird

$$\begin{aligned} \langle C''|\mathfrak{n}\rangle &= \kappa \cdot \langle n|\mathfrak{n}\rangle \\ &= \kappa \cdot \cos(\nu) \cdot |n| \cdot |\mathfrak{n}| \\ &= \kappa \cdot \cos(\nu) \cdot \sqrt{EG - F^2} \\ &= \kappa(s) \cdot \cos(\nu(s)) \cdot \sqrt{E(c(s)) \cdot G(c(s)) - F(c(s))^2} \, . \end{aligned}$$

Zweite Berechnung. Es ist

$$\begin{aligned} C'(s) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} C(s) \\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi(c_1(s), c_2(s)) \\ &= \Phi_u(c_1(s), c_2(s)) c_1'(s) + \Phi_v(c_1(s), c_2(s)) c_2'(s) \\ &= \Phi_u c_1' + \Phi_v c_2' \end{aligned}$$

und also

$$\langle C'|\mathfrak{n}\rangle \;=\; \langle \Phi_u c_1' + \Phi_v c_2' \,|\, \Phi_u \times \Phi_v\rangle \;=\; 0 \, .$$

Also ist auch

$$0 \;=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle C'|\mathfrak{n}\rangle \;=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle C'(s)|\mathfrak{n}(c(s))\rangle \;=\; \langle C''(s)|\mathfrak{n}(c(s))\rangle + \langle C'(s)|\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathfrak{n}(c(s))\rangle \, .$$

Aber es ist auch

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathfrak{n}(c(s)) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathfrak{n}(c_1(s), c_2(s)) \\ &= \mathfrak{n}_u(c_1(s), c_2(s))c_1'(s) + \mathfrak{n}_v(c_1(s), c_2(s))c_2'(s) \\ &= \mathfrak{n}_u c_1' + \mathfrak{n}_v c_2' \ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\langle C''|\mathfrak{n}\rangle &= -\langle C'(s)|\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathfrak{n}(c(s))\rangle \\ &= -\langle \Phi_u c_1' + \Phi_v c_2' \,|\, \mathfrak{n}_u c_1' + \mathfrak{n}_v c_2'\rangle \\ &= -\begin{pmatrix} c_1' & c_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_u\rangle & \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_v\rangle \\ \langle\Phi_v|\mathfrak{n}_u\rangle & \langle\Phi_v|\mathfrak{n}_v\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \ .\end{aligned}$$

Da $\langle\Phi_u|\mathfrak{n}\rangle = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\langle\Phi_u|\mathfrak{n}\rangle &= \langle\Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle + \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_u\rangle \\ 0 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\langle\Phi_u|\mathfrak{n}\rangle &= \langle\Phi_{uv}|\mathfrak{n}\rangle + \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_v\rangle \ .\end{aligned}$$

Da $\langle\Phi_v|\mathfrak{n}\rangle = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\langle\Phi_v|\mathfrak{n}\rangle &= \langle\Phi_{vu}|\mathfrak{n}\rangle + \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_u\rangle \\ 0 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\langle\Phi_v|\mathfrak{n}\rangle &= \langle\Phi_{vv}|\mathfrak{n}\rangle + \langle\Phi_u|\mathfrak{n}_v\rangle \ .\end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$\begin{aligned}\langle C''|\mathfrak{n}\rangle &= \begin{pmatrix} c_1' & c_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle\Phi_{uv}|\mathfrak{n}\rangle \\ \langle\Phi_{vu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle\Phi_{vv}|\mathfrak{n}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \\ &\overset{\S 3.1}{=} \begin{pmatrix} c_1' & c_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \cdot (EG - F^2) \ .\end{aligned}$$

Wir bringen in der aus beiden Rechnungen erhaltenen Gleichung noch den Faktor $\sqrt{EG - F^2}$ auf die andere Seite und halten fest:

Lemma. Sei $c : I \to U$ gegeben, für welches $C(s) := \Phi(c(s))$ eine normierte Parametrisierung der Kurve $K = \Phi(c(I))$ auf $S = \Phi(U)$ ist.

Dabei ist $\kappa = \kappa(s)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $C(s)$.

Sei $\nu = \nu(s)$ der Winkel, der von $\mathfrak{n}$ und von n eingeschlossen wird. Dann ist

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} c' \cdot \sqrt{EG - F^2} \ ,$$

alles in Abhängigkeit von $s \in I$ zu lesen.

3.2.2 Kurven auf der Fläche, die beliebig parametrisiert sind

Sei $c : I \to U$. Wir betrachten die Kurve K, die von $C(t) = \Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

Wir haben den Normalenvektor $n(t)$ und die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve K im Kurvenpunkt $C(t)$.

Es ist $C(t)$ im allgemeinen keine normierte Parametrisierung.

Sei $\nu = \nu(t)$ der Winkel, der von $\mathfrak{n}(c(t))$ und von $n(t)$ eingeschlossen wird.

Definition. Sei

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \;:=\; \sqrt{EG-F^2}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \;\overset{\S 3.1}{=}\; \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{pmatrix} \langle\Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle\Phi_{uv}|\mathfrak{n}\rangle \\ \langle\Phi_{vu}|\mathfrak{n}\rangle & \langle\Phi_{vv}|\mathfrak{n}\rangle \end{pmatrix} ,$$

in Abhängigkeit von $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in U$.

Man beachte

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \;=\; \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \det\left(\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)\right) \;=\; \frac{1}{EG-F^2}\det\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{LN-M^2}{EG-F^2} .$$

Wir wollen nun $\kappa \cdot \cos(\nu)$ berechnen. Sei dazu $\tilde{I}$ ein Intervall und $w : I \to \tilde{I}$ eine Umparametrisierung derart, daß $w'(t) > 0$ ist für $t \in I$ und daß mit $\tilde{c}(s) := c(w^{-1}(s))$ für $s \in \tilde{I}$, d.h. mit $c(t) = \tilde{c}(w(t))$ für $t \in I$, durch $\tilde{C}(s) := \Phi(\tilde{c}(s))$ eine normierte Parametrisierung von $K = \Phi(c(I)) = \Phi(\tilde{c}(\tilde{I}))$ gegeben ist. Es ist also stets $|\tilde{C}'(s)| = 1$.

Ist $\tilde{n} = \tilde{n}(s)$ der Normalenvektor von K im Punkt $\tilde{C}(s)$, dann ist $n(t) = \tilde{n}(w(t))$.

Ist $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(s)$ der Winkel, der von $\mathfrak{n}(\tilde{c}(s))$ und von $\tilde{n}(s)$ eingeschlossen wird, dann ist $\nu(t) = \tilde{\nu}(w(t))$.

Ist $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(s)$ die Krümmung von K im Punkt $\tilde{C}(s)$, dann ist $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(w(t))$.

Es ist $C(t) = \Phi(c(t)) = \Phi(\tilde{c}(w(t))) = \tilde{C}(w(t))$ und also

$$|C'(t)| \;=\; |\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{C}(w(t))| \;=\; |\tilde{C}'(w(t))\!\cdot\! w'(t)| = |\tilde{C}'(w(t))\!\cdot\! w'(t)| \;=\; |\tilde{C}'(w(t))| \cdot w'(t) \;=\; w'(t) .$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} C'(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C(t) \\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(c_1(t), c_2(t)) \\ &= \Phi_u(c_1(t), c_2(t))c_1'(t) + \Phi_v(c_1(t), c_2(t))c_2'(t) \\ &= \Phi_u c_1' + \Phi_v c_2' \end{aligned}$$

und damit

$$|C'(t)|^2 \;=\; \langle C'(t)|C'(t)\rangle \;=\; \langle \Phi_u c_1' {+} \Phi_v c_2' \,|\, \Phi_u c_1' {+} \Phi_v c_2'\rangle \;=\; \left(\begin{smallmatrix} c_1' & c_2' \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \langle\Phi_u|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_u|\Phi_v\rangle \\ \langle\Phi_v|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_v|\Phi_v\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \;=\; c'^{\,\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c' .$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} c'(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) \\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{c}(w(t)) \\ &= \tilde{c}'(w(t)) \cdot w'(t) \\ &= \tilde{c}'(w(t)) \cdot |C'(t)| \\ &= \tilde{c}'(w(t)) \cdot \left(c'(t)^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'(t)\right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas aus §3.2.1 auf $\tilde{c}$ gibt

$$\begin{aligned}
\kappa \cdot \cos(\nu) &= \kappa(t) \cdot \cos(\nu(t)) \\
&= \tilde{\kappa}(w(t)) \cdot \cos(\tilde{\nu}(w(t))) \\
&= \tilde{c}'(w(t))^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \tilde{c}'(w(t)) \cdot \sqrt{EG - F^2} \\
&= \frac{c'(t)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} c'(t)}{c'(t)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'(t)} \cdot \sqrt{EG - F^2} \\
&= \frac{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} .
\end{aligned}$$

Wir halten fest:

Lemma. Sei $c : I \to U$ gegeben. Es ist $C(t) := \Phi(c(t))$ eine Parametrisierung der Kurve $K = \Phi(c(I))$ auf $S = \Phi(U)$.

Dabei ist $\kappa = \kappa(t)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $C(t)$.

Sei $\nu = \nu(t)$ der Winkel, der von $\mathfrak{n}$ und von n eingeschlossen wird. Dann ist

$$\boxed{\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'}} \,,$$

alles in Abhängigkeit von $t \in I$ zu lesen.

Bemerkung. Falls $\nu(t) = 0$ oder $\nu(t) = \pi$ ist für $t \in I$, dann ist $C(t)$ eine Geodäte auf S.

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel S von Radius R.

Wir hatten $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und also $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin(\vartheta)$.

Wir hatten $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin(\vartheta)} \end{pmatrix}$.

Also ist

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \;=\; \sqrt{EG-F^2} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \;=\; R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sei $\vartheta_0 \in (0, \pi)$. Sei $c(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$. Es wird $c' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und also

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \;=\; \frac{L}{E} \;=\; \frac{R \sin(\vartheta)^2}{R^2 \sin(\vartheta)^2} = \frac{1}{R} .$$

Tatsächlich parametrisiert $\Phi(c(\varphi))$ einen Kreis von Radius $R \sin(\vartheta_0)$, welcher überall Krümmung $\kappa = \frac{1}{R \sin(\vartheta_0)}$ hat.

Ferner liegt der Normalenvektor n dieses Kreises in der Ebene $x_3 = R\cos(\vartheta_0)$ und zeigt zur x_3-Achse, während $\mathfrak{n}$ in Richtung des Ursprungs zeigt. Die beiden Vektoren n und $\mathfrak{n}$ schließen also einen Winkel von $\nu = \frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ ein.

Diese geometrische Überlegung gibt also

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{1}{R\sin(\vartheta_0)} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2} - \vartheta_0) \;=\; \frac{1}{R}$$

und bestätigt den oben gefundenen Wert.

Bemerkung. Sei $d \geqslant 1$. Sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch und positiv definit. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch.

Wir wollen die kritischen Stellen von $q(x) := \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}Bx}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ bestimmen.

Es wird

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}(x^{\mathrm{T}}Ax) \;=\; (\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})\,Ax + x^{\mathrm{T}}A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \;=\; 2\,(\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})\,Ax$$

und also

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}q(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\tfrac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}Bx} \\
&= \tfrac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}(x^{\mathrm{T}}Ax)\right)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx) - (x^{\mathrm{T}}Ax)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}(x^{\mathrm{T}}Bx)\right)}{(x^{\mathrm{T}}Bx)^2} \\
&= 2\,\tfrac{((\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})Ax)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx) - (x^{\mathrm{T}}Ax)\cdot((\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})Bx)}{(x^{\mathrm{T}}Bx)^2}\;.
\end{aligned}$$

Dies verschwindet genau dann, wenn

$$((\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})\,Ax)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx) \;\overset{!}{=}\; ((\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})\,Bx)\cdot(x^{\mathrm{T}}Ax)$$

ist.

Analog liefert das Verschwinden von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}q(x)$ die Bedingung

$$((\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix})\,Ax)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx) \;\overset{!}{=}\; ((\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix})\,Bx)\cdot(x^{\mathrm{T}}Ax)$$

Da E_2 die beiden Zeilen $(\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix})$ und $(\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix})$ hat, liefert dies zusammengestellt als Bedingung die vektorielle Gleichung

$$Ax \cdot (x^{\mathrm{T}}Bx) \;\overset{!}{=}\; Bx \cdot (x^{\mathrm{T}}Ax)\;,$$

d.h.

$$B^{-1}Ax \;\overset{!}{=}\; x \cdot (x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}Bx)^{-1} \;=\; x \cdot q(x)\;.$$

Somit muß x ein Eigenvektor von $B^{-1}A$ zum Eigenwert $q(x)$ sein.

Ist umgekehrt x ein Eigenvektor von $B^{-1}A$ zum Eigenwert λ, dann wird $B^{-1}Ax = \lambda x$, also $Ax = \lambda Bx$, also

$$Ax \cdot (x^{\mathrm{T}}Bx) \;=\; \lambda \cdot Bx \cdot (x^{\mathrm{T}}Bx) \;=\; Bx \cdot (x^{\mathrm{T}}Ax)\;.$$

Kritische Stellen sind also genau die Punkte, deren Ortsvektor ein Eigenvektor von $B^{-1}A$ ist. ([2])

Da $\{q(x)|\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\} = \{q(x)|\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |x| = 1\}$, hat $q(x)$ eine globale Maximalstelle und eine globale Minimalstelle. Diese müssen kritische Stellen sein. Da bei den kritischen Stellen die Eigenwerte als Werte angenommen werden, erkennen wir, daß die kritischen Stellen globale Extremstellen sind.

Definition. Sei $\binom{u_0}{v_0} \in U$. Sei $P_0 := \Phi(u_0, v_0) \in \Phi(U) = S$.

Die *Weingarten-Matrix* in P_0 ist gegeben durch

$$\mathrm{W} \ := \ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \ ,$$

wobei E, F, G, L, M, N in $\binom{u_0}{v_0}$ zu nehmen sind.

Die Eigenvektoren der Weingarten-Matrix W heißen *Hauptkrümmungsvektoren*, und ihre Eigenwerte heißen *Hauptkrümmungen* an der Stelle $\binom{u_0}{v_0}$, d.h. im Punkt $P_0 = \Phi(u_0, v_0)$.

Der Vektor $\mathfrak{n} := \Phi_u \times \Phi_v = \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$ steht, an P_0 angesetzt, senkrecht zur Tangentialebene an S in P_0.

Sei H eine Ebene, die den Punkt P_0 und die Gerade $\{\, P_0 + r\mathfrak{n} \ : \ r \in \mathbb{R} \,\}$ enthält.

Sei I ein Intervall. Sei die Parametrisierung $c : I \to U$ so, daß die Kurve $K := \Phi(c(I))$ in $H \cap S$ liegt und P_0 enthält. Genauer, es gebe $t_0 \in I$, wobei t_0 kein Randpunkt von I sei, mit $c(t_0) = \binom{u_0}{v_0}$ und also $\Phi(c(t_0)) = P_0$.

Eine solche Kurve K heißt auch ein *Normalschnitt* von S in P_0.

> Die konkrete Angabe einer Parametrisierung c, für welche $\Phi(c(t))$ eine Kurve $K \subseteq H \cap S$ parametrisiert, der P_0 enthält, ist oft schwierig. Sie ist aber häufig auch nicht erforderlich.

Sei $\kappa = \kappa(t_0)$ die Krümmung und $n = n(t_0)$ der Normalenvektor von K im Punkt P_0.

Sei ν der Winkel, der von $\mathfrak{n}$ und n eingeschlossen wird. Es liegen $\mathfrak{n}$ und n auf einer Geraden. Es ist $\nu = 0$ und also $\cos(\nu) = 1$, wenn $\mathfrak{n}$ und n in dieselbe Richtung zeigen. Es ist $\nu = \pi$ und also $\cos(\nu) = -1$, wenn $\mathfrak{n}$ und n in entgegengesetzte Richtung zeigen.

Es ist

$$\kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{=\pm 1} \ = \ \frac{c'^{\,\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'}{c'^{\,\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \ .$$

Falls der Normalschnitt K so gewählt ist, daß $c' = c'(t_0)$ ein Hauptkrümmungsvektor zur Hauptkrümmung λ ist, dann ist $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c' = \lambda \cdot c'$, also $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c' = \lambda \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'$ und also

$$\kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{=\pm 1} \ = \ \frac{c'^{\,\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'}{c'^{\,\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \ = \ \lambda \ .$$

[2] Zu B gibt es ein $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv definit mit $C^2 = B$. Da die symmetrische Matrix $C^{-1}AC^{-1}$ nur reelle Eigenwerte hat, gilt dies auch für $B^{-1}A = C^{-1}(C^{-1}AC^{-1})C$.

Daher sind die Hauptkrümmungen von S in P_0 die maximalen und minimalen Werte von $\kappa \cdot \cos(\nu)$ für einen Normalschnitt K von S in P_0; vgl. vorstehende Bemerkung.

Bemerkung. Wir betrachten die Weingarten-Matrix W an der Stelle $\binom{u_0}{v_0} \in U$ und ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_{\mathrm{W}}(X) \;=\; (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\;.$$

Dann sind λ_1 und λ_2 Hauptkrümmungen von S in P_0 und es ist

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \det \mathrm{W} \\
&= \det\left(\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&= \left(\det \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} \cdot \det \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) \\
&= \tfrac{LN-M^2}{EG-F^2} \\
&= \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\;.
\end{aligned}$$

In P_0 ist also das Produkt der Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 gleich der Gaußschen Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u_0, v_0)$.

Definition. Sind λ_1 und λ_2 Hauptkrümmungen von S in $\Phi(u,v)$, dann heißt

$$\mathrm{K}_{\text{mittel}} \;=\; \mathrm{K}_{\text{mittel}}(u,v) \;:=\; \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\mathrm{W}(u,v))$$

die *mittlere Krümmung* von S an der Stelle $\binom{u}{v} \in U$, also im Punkt $\Phi(u,v)$.

Beispiel. Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\vartheta \in [0,\pi]$, das Ellipsoid $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + (\frac{1}{2}x_3)^2 = 1 \}$.

Es ist $\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ und $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 4-3\cos(\vartheta)^2 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\sqrt{EG-F^2} = \sin(\vartheta)\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2}$.

Wir haben

$$\mathfrak{n} \;=\; \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix}\;.$$

Es ist $\Phi_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_{\varphi\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\langle \Phi_{\varphi\varphi} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2\sin(\vartheta)^3}{\sin(\vartheta)\sqrt{4 - 3\cos(\vartheta)^2}} &&= \frac{2\sin(\vartheta)^2}{\sqrt{4 - 3\cos(\vartheta)^2}} \\
M &= \frac{\langle \Phi_{\varphi\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} &&= 0 \\
N &= \frac{\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2(\sin(\vartheta)^3 + \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2)}{\sin(\vartheta)\sqrt{4 - 3\cos(\vartheta)^2}} &&= \frac{2}{\sqrt{4 - 3\cos(\vartheta)^2}} \; .
\end{aligned}
$$

Insgesamt wird

$$
\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2}} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Wir erhalten die Weingarten-Matrix

$$
\mathrm{W} = \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4-3\cos(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; .
$$

Als Hauptkrümmungsvektoren erhalten wir $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, mit zugehöriger Hauptkrümmung

$$
\lambda_1 = \frac{2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{1/2}} \; ,
$$

und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, mit zugehöriger Hauptkrümmung

$$
\lambda_2 = \frac{2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{3/2}} \; .
$$

Die Gaußsche Krümmung ist

$$
\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \; .
$$

Die mittlere Krümmung ist

$$
\mathrm{K}_{\text{mittel}} = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{1/2}} + \frac{2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{3/2}}\right) = \frac{5-3\cos(\vartheta)^2}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{3/2}} \; .
$$

3.3 Theorema egregium

Wir behalten die Situation von §3.1 bei.

Sei also $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche $S = \Phi(U)$.

Wir schreiben kurz $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u,v) := \Phi_u \times \Phi_v$.

Es wird

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{K}_{\text{Gauß}} \\
= \quad & \tfrac{LN-M^2}{EG-F^2} \\
= \quad & \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}(\langle\Phi_{uu}|\mathfrak{n}\rangle\langle\Phi_{vv}|\mathfrak{n}\rangle - \langle\Phi_{uv}|\mathfrak{n}\rangle^2) \\
= \quad & \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}(\langle\Phi_{uu}|\Phi_u\times\Phi_v\rangle\langle\Phi_{vv}|\Phi_u\times\Phi_v\rangle - \langle\Phi_{uv}|\Phi_u\times\Phi_v\rangle\langle\Phi_{uv}|\Phi_u\times\Phi_v\rangle) \\
\overset{[3,\ 3.11.2]}{=} \quad & \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}(\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v)\cdot\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v) - \det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\cdot\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)) \\
= \quad & \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}(\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v)^{\mathrm{T}}\cdot\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v) - \det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)^{\mathrm{T}}\cdot\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)) \\
= \quad & \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}\Big(\det\big((\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v)^{\mathrm{T}}\cdot(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v)\big) - \det\big((\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)^{\mathrm{T}}\cdot(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\big)\Big) \\
= \quad & \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uu}|\Phi_{vv}\rangle & \langle\Phi_{uu}|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_{uu}|\Phi_v\rangle \\ \langle\Phi_u|\Phi_{vv}\rangle & \langle\Phi_u|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_u|\Phi_v\rangle \\ \langle\Phi_v|\Phi_{vv}\rangle & \langle\Phi_v|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_v|\Phi_v\rangle\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uv}|\Phi_{uv}\rangle & \langle\Phi_{uv}|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_{uv}|\Phi_v\rangle \\ \langle\Phi_u|\Phi_{uv}\rangle & \langle\Phi_u|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_u|\Phi_v\rangle \\ \langle\Phi_v|\Phi_{uv}\rangle & \langle\Phi_v|\Phi_u\rangle & \langle\Phi_v|\Phi_v\rangle\end{pmatrix}\right) \\
\overset{\S 2.2}{=} \quad & \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uu}|\Phi_{vv}\rangle & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uv}|\Phi_{uv}\rangle & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{pmatrix}\right) \\
\overset{\text{Entw. n. erster Zeile}}{=} \quad & \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix}\langle\Phi_{uu}|\Phi_{vv}\rangle-\langle\Phi_{uv}|\Phi_{uv}\rangle & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Es ist

$$\tfrac{1}{2}G_u \overset{\S 2.2}{=} \langle\Phi_v|\Phi_{uv}\rangle\ .$$

Es folgt

$$\tfrac{1}{2}G_{uu} \;=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\langle\Phi_v|\Phi_{uv}\rangle \;=\; \langle\Phi_{uv}|\Phi_{uv}\rangle + \langle\Phi_v|\Phi_{uuv}\rangle\ .$$

Es ist

$$F_u - \tfrac{1}{2}E_v \overset{\S 2.2}{=} \langle\Phi_v|\Phi_{uu}\rangle\ .$$

Es folgt

$$F_{uv} - \tfrac{1}{2}E_{vv} \;=\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\langle\Phi_v|\Phi_{uu}\rangle \;=\; \langle\Phi_{vv}|\Phi_{uu}\rangle + \langle\Phi_v|\Phi_{uuv}\rangle\ .$$

Die Differenz ist

$$F_{uv} - \tfrac{1}{2}E_{vv} - \tfrac{1}{2}G_{uu} \;=\; \langle\Phi_{vv}|\Phi_{uu}\rangle - \langle\Phi_{uv}|\Phi_{uv}\rangle\ .$$

Einsetzen in den Matrixeintrag oben links gibt nun:

Lemma (Theorema egregium). Wir betrachten eine Stelle $\binom{u}{v} \in U$.

Dort läßt sich die Gaußsche Krümmung wie folgt ausdrücken.

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \;=\; \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix}F_{uv}-\frac{1}{2}G_{uu}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{pmatrix}\right)$$

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [0,\pi]$, eine Kugel S von Radius R.

Wir hatten $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} R^2\sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Insbesondere ist $E_\vartheta = 2R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = R^2\sin(2\vartheta)$ und $E_{\vartheta\vartheta} = 2R^2\cos(2\vartheta)$

Nach Theorema egregium wird

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{K}_{\text{Gauß}} & = & \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} F_{\varphi\vartheta}-\frac{1}{2}G_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2}E_{\vartheta\vartheta} & \frac{1}{2}E_\varphi & F_\varphi-\frac{1}{2}E_\vartheta \\ F_\vartheta-\frac{1}{2}G_\varphi & E & F \\ \frac{1}{2}G_\vartheta & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_\vartheta & \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}E_\vartheta & E & F \\ \frac{1}{2}G_\varphi & F & G \end{pmatrix}\right) \\
& = & \frac{1}{(R^4\sin(\vartheta)^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}E_{\vartheta\vartheta} & \frac{1}{2}0 & 0-\frac{1}{2}E_\vartheta \\ 0-\frac{1}{2}0 & E & 0 \\ \frac{1}{2}0 & 0 & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_\vartheta & \frac{1}{2}0 \\ \frac{1}{2}E_\vartheta & E & 0 \\ \frac{1}{2}0 & 0 & G \end{pmatrix}\right) \\
& = & \frac{1}{(R^4\sin(\vartheta)^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} -R^2\cos(2\vartheta) & 0 & -\frac{1}{2}R^2\sin(2\vartheta) \\ 0 & R^2\sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}R^2\sin(2\vartheta) & 0 \\ \frac{1}{2}R^2\sin(2\vartheta) & R^2\sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}\right) \\
& = & \frac{1}{(R^4\sin(\vartheta)^2)^2}\left(-R^6\sin(\vartheta)^2\cos(2\vartheta) + \frac{1}{4}R^6\sin(2\vartheta)^2\right) \\
& = & \frac{1}{(R^4\sin(\vartheta)^2)^2}\left(-R^6\sin(\vartheta)^2(\cos(\vartheta)^2-\sin(\vartheta)^2) + R^6\sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2\right) \\
& = & \dfrac{1}{R^2}\,.
\end{array}$$

Dies stimmt mit der vormaligen Berechnung überein; cf. Beispiel in §3.1.

3.4 Gauß-Bonnet

Wir behalten die Situation von §3.1 bei.

Sei also $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche $S = \Phi(U)$.

Lemma (Gauß-Bonnet, Version 1). Sei $J \subseteq U$ derart, daß $\Phi|_J$ injektiv ist und daß $A := \Phi(J) \subseteq S$ einfach zusammenhängend ist, also zusammenhängend ist und "keine Löcher" hat.

Sei der Rand ∂J von J stückweise positiv orientiert parametrisiert durch stetig differenzierbare Abbildungen $c_{(1)}, \ldots, c_{(k)}$, wobei $I_{(j)}$ ein abgeschlossenes Intervall und $c_{(j)} : I_{(j)} \to U$ ist für $1 \leqslant j \leqslant k$. Sei noch $c_{(k+1)} := c_{(1)}$.

Sei $C_{(j)} := \Phi \circ c_{(j)}$ für $1 \leqslant j \leqslant k+1$. Dann parametrisieren $C_{(1)}, \ldots, C_{(k)}$ den Rand ∂A von A.

Sei $\alpha_{(j)}$ der Winkel zwischen $C'_{(j)}(\max(I_{(j)}))$ und $C'_{(j+1)}(\min(I_{(j+1)}))$ für $1 \leqslant j \leqslant k$.

Sei β der Winkel zwischen dem Binormalenvektor $b = \frac{C' \times C''}{|C' \times C''|}$ der Kurve ∂A und dem Vektor $\Phi_u \times \Phi_v$ am betrachteten Kurvenpunkt.

Dann ist

$$\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O \;+\; \sum_{j=1}^{k}\alpha_{(j)} \;+\; \int_{\partial A}\kappa\cdot\cos(\beta)\,\mathrm{d}s \;=\; 2\pi$$

Bemerkung. Ist $\Phi \circ c_{(j)}$ eine Geodäte auf S, dann steht der Binormalenvektor b, der senkrecht auf dem Normalenvektor n steht, auch senkrecht auf $\Phi_u \times \Phi_v$.

Also ist diesenfalls $\beta = \frac{\pi}{2}$ und somit $\cos(\beta) = 0$.

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel S von Radius R.

Wir parametrisieren den Rand des Vierecks

$$J \;:=\; \{\, \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \;|\; \varphi \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi],\ \vartheta \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}]\} \;\subseteq\; U \;=\; [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

wie folgt.

Sei $c_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}+t \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sei $c_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{4}+t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Sei $c_{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \pi-t \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sei $c_{(4)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}-t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Es ist $A := \Phi(J)$ ein krummliniges Viereck auf der Kugel S.

Es sind $\alpha_{(1)} = \alpha_{(2)} = \alpha_{(3)} = \alpha_{(4)} = \frac{\pi}{2}$, da Längenkreise und Breitenkreise immer einen Winkel von $90° = \frac{\pi}{2}$ einschließen.

Es ist

$$\begin{aligned} |\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta| \;&=\; \left| -R^2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right| \\ &=\; R^2\sqrt{\sin(\vartheta)^4\cos(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^4\sin(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2} \;=\; R^2\sin(\vartheta)\ . \end{aligned}$$

Ferner ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{1}{R^2}$; vgl. Beispiel in §3.1.

Damit wird

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O \;&=\; R^{-2}\textstyle\iint_A 1\,\mathrm{d}O \\ &=\; R^{-2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta|\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &=\; R^{-2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &=\; \tfrac{\pi}{2}[-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \\ &=\; \tfrac{\pi}{4}\sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

Für $c_{(2)}$, $c_{(3)}$, $c_{(4)}$ ist $\cos(\beta) = 0$, da wir uns auf Geodäten der Kugel bewegen.

Für $c_{(1)}$ wird $C_{(1)}(t) = \Phi(c_{(1)}(t)) = R\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}+t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{R}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $c_{(1)}$ ist also $\kappa = (\frac{R}{2}\sqrt{2})^{-1}$, da wir uns auf einem Breitenkreis von Radius $\frac{R}{2}\sqrt{2}$ bewegen. Dort zeigt $\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta$ zum Kugelmittelpunkt. Es liegt n in der Ebene $x_3 = \frac{R}{2}\sqrt{2}$. Es läuft die von $C_{(1)}(t)$ parametrisierte Kurve dem Breitenkreis entlang von $\frac{R}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ nach $\frac{R}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Also zeigt $b = v \times n$ positiv in Richtung der x_3-Achse.

Für $c_{(1)}$ ist folglich $\beta = \frac{3\pi}{4}$ und also $\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Es ist $C'_{(1)}(t) = \frac{R}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}-\cos(t)\\-\sin(t)\\0\end{pmatrix}$ und also $|C'_{(1)}(t)| = \frac{R}{2}\sqrt{2}$. Somit wird

$$\int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\ \mathrm{d}s \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{R}{2}\sqrt{2})^{-1} \cdot (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \tfrac{R}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{d}t \ = \ -\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\ .$$

Insgesamt wird

$$\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O \ + \ \sum_{j=1}^{4} \alpha_{(j)} \ + \ \int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\,\mathrm{d}s \ = \ \tfrac{\pi}{4}\sqrt{2} + 4 \cdot \tfrac{\pi}{2} + (-\tfrac{\pi}{4}\sqrt{2}) \ = \ 2\pi\ .$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 1, im vorliegenden Fall.

Lemma (Gauß-Bonnet, Version 2). Sei S kompakt und ohne Rand, d.h. mit $\partial S = \emptyset$. Sei g die Anzahl der Löcher in S. Vgl. auch nachfolgende Bemerkung.

Dann ist

$$\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O \ = \ (2 - 2g) \cdot 2\pi.$$

Bemerkung. Noch eine Nachbemerkung zur Anzahl g der Löcher von S.

Z.B. ist für eine Kugel $g = 0$.

Z.B. ist für einen Torus $g = 1$.

Beides gemäß Anschauung.

Allgemein kann man S mit einem Netz aus Dreiecken überziehen. Man spricht von einer Triangulierung von S.

Ist dann e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen in diesem Dreiecksnetz, dann ist

$$e - k + f \ = \ 2 - 2g\ .$$

Auf diese Weise kann man g berechnen, ohne auf Anschauung angewiesen zu sein.

So z.B. gibt es für die Kugel eine Triangulierung mit 4 Dreiecken, in der Art eines krummlinigen Tetraeders. Dabei ist $e = 4$, $k = 6$ und $f = 4$, also $e - k + f = 2$, woraus $g = 0$

folgt.

Beispiel. Sei $R > 0$. Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\ \cos(\vartheta)\end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [0,\pi]$, eine Kugel S von Radius R.

Es ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{1}{R^2}$; cf. §3.1.

Es ist der Flächeninhalt dieser Kugel gleich $\iint_S 1\,\mathrm{d}O = 4\pi R^2$.

Für die Anzahl der Löcher von S haben wir $g = 0$.

Also wird

$$\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O \;=\; \iint_S \frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}O \;=\; \frac{1}{R^2}\iint_S 1\,\mathrm{d}O \;=\; \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 \;=\; 4\pi \;=\; (2-2\cdot 0)\cdot 2\pi\ .$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

Literatur

[1] Baule, B., *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs*, Band VII, *Differentialgeometrie*, 6. Auflage, S. Hirzel Verlag, 1965.

[2] Hamilton, M., *Differentialgeometrie für Geodäten,* Skript, Stuttgart, 2012.

[3] Kimmerle, W.; Stroppel, M., *Lineare Algebra und Geometrie,* 4. Auflage, 2013.

[4] Kimmerle, W.; Stroppel, M., *Analysis,* 4. Auflage, 2014.

[5] Knarr, N., *Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge,* Vorlesungsfolien, 2022.