Differentialgeometrie für Geodäten
Wintersemester 2011/12

Mark Hamilton

30. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Kurven im $\mathbb{R}^3$

1.1 Grundlagen der Topologie

Wir betrachten einen Punkt x im $\mathbb{R}^n$. Der **offene Ball vom Radius** δ **um** x ist definiert als

$$B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\}.$$

Hier bezeichnet $\|a\|$ die euklidische Länge von $a \in \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Definition 1.1. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, falls es um jeden Punkt x von U einen offenen Ball gibt, der ganz in U enthalten ist, d.h. für alle $x \in U$ existiert ein $\delta > 0$ (abhängig von x), so dass $B_\delta(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offene Umgebung von x** falls $x \in U$ und U offen ist.

Es ist sehr nützlich nicht nur offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ zu betrachten, sondern auch Mengen, die in einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ offen sind.

Definition 1.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $U \subset M$ **offen in M**, falls es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U = M \cap V$. Analog sind offene Umgebungen von Punkten in M definiert.

Bemerkung 1.3. Falls $U \subset M$ offen in M ist, muss U im allgemeinen nicht offen in $\mathbb{R}^n$ sein!

Beispiel 1.4. Betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ und } -2 \leq x \leq 2\}.$$

Dann ist $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ und } -1 < x < 1\}$ offen in M aber nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 1.5. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **stetig in** $x \in M$, falls für jede in N offene Umgebung V von $f(x)$ eine in M offene Umgebung U von x existiert, so dass $f(U) \subset V$. Die Abbildung f heißt stetig, falls sie in jedem Punkt von M stetig ist.

Besonders wichtig sind stetige Abbildungen, die bijektiv sind und deren Umkehrfunktionen auch stetig sind.

Definition 1.6. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Homöomorphismus**, falls sie bijektiv ist und f sowie f^{-1} stetig sind.

Definition 1.7. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt im folgenden **differenzierbar** falls sie unendlich oft differenzierbar ist, das heißt alle partiellen Ableitungen jeder Komponente von jeder Ordnung existieren (die Abbildung ist also C^∞).

Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar. Dann ist in jedem Punkt $x \in U$ eine lineare Abbildung $D_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch die Richtungsableitung von f

$$D_x f(v) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, f(x + tv).$$

Die Abbildung $D_x f$ heißt das **Differential** von f im Punkt x. Insbesondere gilt

$$D_x f(e_i) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, f(x + te_i) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)^T.$$

Das bedeutet, dass die darstellende Matrix des Differentials die Jabobi-Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Satz 1.8 (Kettenregel)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^m, W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ differenzierbar mit Differential*

$$D_x(g \circ f) = D_{f(x)} g \circ D_x f.$$

Das heißt, die darstellende Matrix des Differentials von $g \circ f$ ist das Produkt der Matrizen von g und f.

Definition 1.9. Eine Abbildung $f : U \to V$, mit $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, heißt **Diffeomorphismus**, falls sie bijektiv ist und f sowie f^{-1} differenzierbar sind.

Die Jacobi-Matrix eines Diffeomorphismus ist eine invertierbare Matrix (Beweis mit der Kettenregel).

1.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 1.10. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine **parametrisierte Kurve im** $\mathbb{R}^n$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$c : I \to \mathbb{R}^n.$$

Nach unserer Vereinbarung bedeutet "differenzierbar" unendlich oft differenzierbar. Manchmal betrachtet man parametrisierte Kurven auch auf abgeschlossenen Intervallen. Differenzierbarkeit ist dann als einseitige Differenzierbarkeit zu verstehen. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve.

Definition 1.11. Die Ableitung

$$v(t) = \frac{d}{dt}c(t) = \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))$$

heißt **Geschwindigkeitsvektor** zur Zeit t.

Definition 1.12. Die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär** falls der Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ für alle Zeiten $t \in I$ nicht verschwindet.

Beispiel 1.13. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die **Schraubenlinie** gegeben durch

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Dann ist c eine Kurve mit

$$v(t) = (-a \sin t, b \cos t, b).$$

Insbesondere ist c regulär.

Beispiel 1.14. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$c(t) = (t^3, t^2).$$

Dann gilt $v(0) = (0, 0)$, d.h. c ist nicht regulär.

Beispiel 1.15. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$c(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4).$$

Dann gilt $c(2) = c(-2)$, d.h. c ist nicht injektiv.

Definition 1.16. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine **Parametertransformation** ist ein Diffeomorphismus $\phi : J \to I$ von einem weiteren offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ auf I. Die parametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt **Umparametrisierung** von c.

Eine Umparametrisierung ändert nicht das Bild der Kurve im $\mathbb{R}^n$, sie wird nur unterschiedlich schnell durchlaufen. Sei $\phi : J \to I$ eine Parametertransformation. Da das Differential eines Diffeomorphismus invertierbar ist, gilt

$$\dot{\phi}(t) \neq 0, \quad \text{für alle } t \in J.$$

Proposition 1.17. *Jede Umparametrisierung einer regulären Kurve ist wieder regulär.*

Beweis. Nach der Kettenregel gilt

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\phi(t))\dot{\phi}(t).$$

Also ist $\dot{\tilde{c}}(t) \neq 0$, da beide Terme auf der rechten Seite ungleich null sind. □

Beispiel 1.18. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Parametertransformation $\phi(t) = 2t$. Ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Schraubenlinie, dann gilt für $\tilde{c} = c \circ \phi$

$$\tilde{c}(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t, 2bt).$$

Das heißt $\tilde{c}$ durchläuft diesselbe Kurve doppelt so schnell. Für die Geschwindigkeit gilt $\dot{\tilde{c}}(t) = 2\dot{c}(2t)$.

Definition 1.19. Sei $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L(c) = \int_a^b \|v(t)\| dt$$

Länge der Kurve.

Hierbei ist $\|v(t)\|$ die euklidische Länge des Vektors $v(t)$,

$$\|v(t)\| = \sqrt{v_1(t)^2 + \ldots + v_n(t)^2}.$$

Beispiel 1.20. Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t),$$

die einmal durchlaufene Kreiskurve vom Radius $a > 0$. Dann ist

$$v(t) = (-a \sin t, a \cos t),$$

also $\|v(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2} = a$. Deshalb ist

$$L(c) = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

Die Länge einer Kurve hat folgende wichtige Eigenschaft unter Parametertransformationen.

Proposition 1.21. *Die Länge einer parametrisierten Kurve ändert sich nicht bei Umparametrisieren.*

Beweis. Sei $\phi : (a', b') \to (a, b)$ eine Parametertransformation. Dann gilt für $\tilde{c} = c \circ \phi$ nach der Kettenregel und der Substitutionsregel für Integrale:

$$\begin{aligned} L(\tilde{c}) &= \int_{a'}^{b'} \|(c \circ \phi)^{\cdot}(t)\| dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{c}(\phi(t))\| \cdot |\dot{\phi}(t)| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(s)\| ds \\ &= L(c). \end{aligned}$$

□

Definition 1.22. Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert** falls $\|v(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Insbesondere ist eine solche Kurve regulär. Ist die Kurve $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $L(c) = b - a$. Wegen dem folgenden Satz werden wir oft annehmen, dass eine reguläre Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Satz 1.23. *Zu jeder regulären parametrisierten Kurve gibt es eine Umparametrisierung in eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve.*

Beweis. Siehe [1, Proposition 2.1.13]. □

Anschaulich kann man, da die Geschwindigkeit überall ungleich null ist, durch eine Umparametrisierung erreichen, dass die Geschwindigkeit konstant eins wird.

Beispiel 1.24. Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ wieder die Kreiskurve vom Radius a wie oben. Dann ist

$$\phi : [0, 2\pi a] \to [0, 2\pi], \phi(t) = \frac{t}{a}$$

eine Parametertransformation, so dass die Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die Länge der Kurve $\tilde{c}$ berechnet man durch die Differenz der Intervallgrenzen, also wieder $2\pi a$.

1.3 Kurven im $\mathbb{R}^3$

Neben der Geschwindigkeit hat eine Kurve auch eine Beschleunigung. Das führt auf den Begriff der Krümmung einer Kurve im $\mathbb{R}^3$. In diesem Abschnitt sind alle Kurven **nach Bogenlänge parametrisiert**. Dann hat der Geschwindigkeitsvektor die Länge eins.

Definition 1.25. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve. Die Funktion

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\|,$$

heißt **Krümmung** der Kurve c.

Die Krümmung ist also genau der Betrag der **Beschleunigung** der Kurve.

Proposition 1.26. *Eine Kurve ist eine Gerade genau dann, wenn $\kappa \equiv 0$.*

In Punkten, in denen die Beschleunigung nicht verschwindet, kann man einen auf dem Geschwindigkeitsvektor senkrechten Vektor definieren.

Definition 1.27. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $t \in I$ so dass $\kappa(t) \neq 0$. Dann heißt

$$n(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}$$

der **Normalenvektor** von c in t.

Der Normalenvektor ist gerade der auf Länge eins normierte Beschleunigungsvektor der Kurve.

Lemma 1.28. *Ist t eine Zeit mit $\kappa(t) \neq 0$, dann ist $n(t)$ senkrecht auf $v(t)$.*

Beweis. Das folgt aus der Formel (nach Annahme ist $\|\dot{c}\| = 1$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle \dot{c}, \dot{c}\rangle = \langle \ddot{c}, \dot{c}\rangle + \langle \dot{c}, \ddot{c}\rangle \\ &= 2\langle \ddot{c}, \dot{c}\rangle. \end{aligned}$$

□

Das heißt, wenn die Geschwindigkeit vom Betrag konstant ist, ist der Beschleunigungsvektor senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor. Mit dem Geschwindigkeitsvektor und dem Normalenvektor (=normierte Beschleunigung) definiert man einen dritten Vektor:

Definition 1.29. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $t \in I$ eine Zeit mit $\kappa(t) \neq 0$. Dann heißt

$$b(t) = v(t) \times n(t)$$

der **Binormalenvektor** der Kurve zur Zeit t.

Hier ist $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$. Da $v(t)$ und $n(t)$ die Länge eins haben und senkrecht aufeinanderstehen, hat auch $b(t)$ die Länge eins. Die Vektoren v, n, b bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, das **begleitende Dreibein**.

Definition 1.30. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $t \in I$ eine Zeit mit $\kappa(t) \neq 0$. Dann heißt

$$\tau(t) = \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle$$

die **Windung** oder **Torsion** der Kurve zur Zeit t.

Die Windung einer Kurve ist ein Maß für die Änderung des Normalenvektors aus der mit dem Geschwindigkeitsvektor aufgespannten Ebene.

Satz 1.31 (Frenet-Gleichungen)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $t \in I$ eine Zeit mit $\kappa(t) \neq 0$. Dann gelten im Zeitpunkt t die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \kappa n \\ \dot{n} &= -\kappa v + \tau b \\ \dot{b} &= -\tau n. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition des Normalenvektors n. Um die zweite und dritte Gleichung zu beweisen, berechnen wir jeweils das Skalarprodukt der rechten und der linken Seite mit der Orthonormalbasis v, n, b:

$$\begin{aligned} \langle \dot{n}, v \rangle &= \frac{d}{dt}\langle n, v \rangle - \langle n, \dot{v} \rangle \\ &= -\kappa \\ \langle \dot{n}, n \rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle n, n \rangle = 0 \\ \langle \dot{n}, b \rangle &= \tau. \end{aligned}$$

Das beweist die zweite Gleichung.

$$\begin{aligned}
\langle \dot{b}, v\rangle &= \frac{d}{dt}\langle b, v\rangle - \langle b, \dot{v}\rangle \\
&= 0 - \kappa\langle b, n\rangle = 0 \\
\langle \dot{b}, n\rangle &= \frac{d}{dt}\langle b, n\rangle - \langle b, \dot{n}\rangle = 0 - \tau \\
&= -\tau \\
\langle \dot{b}, b\rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle b, b\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Das beweist die dritte Gleichung. □

Beispiel 1.32. Wir betrachten als Beispiel die Schraubenlinie. Wir wählen die Parametrisierung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$c(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), \frac{1}{\sqrt{2}}t\right).$$

Dann ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 1\right),$$

d.h. $\|v(t)\|^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Die Kurve ist also nach Bogenlänge parametrisiert und wir können die Theorie dieses Abschnitts anwenden. Die Beschleunigung ist

$$\ddot{c}(t) = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 0\right).$$

Damit ist die Krümmung

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| = \frac{1}{2}.$$

Die Krümmung der Schraubenlinie ist also konstant. Da die Krümmung zu keiner Zeit Null ist, ist der Normalenvektor immer definiert und gegeben durch

$$n(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\kappa(t)} = \left(-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 0\right).$$

Damit kann man den Binormalenvektor berechen:

$$\begin{aligned}
b(t) &= v(t) \times n(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 1\right) \times \left(-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 0\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 1\right).
\end{aligned}$$

Schließlich können wir die Windung berechnen:

$$
\begin{aligned}
\tau(t) &= \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 0 \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right), 1 \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Kapitel 2

Reguläre Flächen im $\mathbb{R}^3$

2.1 Reguläre Flächen

Definition 2.1. Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche**, falls es für jeden Punkt $p \in S$ eine in S offene Umgebung $V \subset S$ und eine Abbildung $\phi : U \to V$ von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so dass gilt:

(a) ϕ ist differenzierbar.

(b) ϕ ist ein Homöomorphismus.

(c) Für jeden Punkt $q \in U$ ist das Differential $D_q\phi$ injektiv.

Die Abbildung ϕ heißt **lokale Parametrisierung** oder **Karte** von S um p. Die Menge $V \subset S$ heißt **Koordinaten-** oder **Kartenumgebung**.

Betrachte in U die Kurven $c_1(t) = q + te_1$ und $c_2(t) = q + te_2$. Diese Kurven werden durch ϕ zu Kurven in S abgebildet. Die Tangentialvektoren v_1 und v_2 an diese Kurven im Punkt p sind nach Definition des Differentials gegeben durch

$$\begin{aligned} D_q\phi(e_1) &= (\partial_x\phi_1, \partial_x\phi_2, \partial_x\phi_3) \quad \text{und} \\ D_q\phi(e_2) &= (\partial_y\phi_1, \partial_y\phi_2, \partial_y\phi_3), \end{aligned}$$

wobei x und y die Koordinaten auf U sind. Bedingung (c) besagt dann, dass diese Vektoren linear unabhängig, d.h. ungleich Null und nicht parallel sind.

Beispiel 2.2. Jede **affine Ebene** von der Form $E = a + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, mit u und v linear unabhängig, ist eine reguläre Fläche. Es genügt eine Kartenumgebung:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to E, (x, y) \mapsto a + xu + yv.$$

Beispiel 2.3. Die **Einheitssphäre**

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Die Sphäre ist die Oberfläche einer Kugel. Die einfachste Parametrisierung ist eine Überdeckung mit 6 Karten, indem man gegenüberliegende Hemisphären senkrecht auf den $\mathbb{R}^2$ projiziert (zwei Karten genügen in diesem Fall nicht, da Kartenumgebungen offen sein müssen). Es gibt eine zweite Art von Parametrisierung, die mit zwei Karten auskommt, gegeben durch die **stereographische Projektion**. Sei $N = (0, 0, 1)$ der Nordpol der Sphäre. Die Gerade durch den Nordpol und einen beliebigen Punkt $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ schneidet die x-y-Ebene in einem Punkt $(u, v, 0)$. Das heißt, es gibt eine Zahl t so dass

$$t[(u, v, 0) - (0, 0, 1)] + (0, 0, 1) = (x, y, z).$$

Aus der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bekommt man

$$t = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}$$

und damit

$$(x, y, z) = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}\left(u, v, \frac{u^2 + v^2 - 1}{2}\right).$$

Diese Gleichung definiert die erste Karte $\phi_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$,

$$\phi_N(u, v) = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}\left(u, v, \frac{u^2 + v^2 - 1}{2}\right).$$

Eine zweite Karte bekommt man durch stereographische Projektion vom Südpol $S = (0, 0, -1)$. Sie ist gegeben durch $\phi_S : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{S\}$,

$$\phi_S(u, v) = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}\left(u, v, \frac{1 - u^2 - v^2}{2}\right).$$

Beide Karten zusammen überdecken die ganze Sphäre. Man kann leicht überprüfen, dass die definierenden Eigenschaften für eine reguläre Fläche erfüllt sind.

Bemerkung 2.4. S^2 ist eine **kompakte** Fläche, da sie als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ abgeschlossen und beschränkt ist. Eine affine Ebene ist dagegen nicht kompakt, da nicht beschränkt. Kompakte Flächen sind besonders wichtig.

Wir betrachten zwei allgemeine Möglichkeiten, wie man reguläre Flächen konstruieren kann. Seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

Definition 2.5. Der **Graph** von f ist die Menge

$$\operatorname{graph} f = \{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = y\}.$$

Satz 2.6. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Dann ist der Graph von f eine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$.*

Beweis. Wir können den gesamten Graphen durch eine Kartenumgebung überdecken: Sei $\phi : U \to \operatorname{graph} f$ die Abbildungen

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Dann ist ϕ differenzierbar. Wir haben

$$(\partial_x \phi_1, \partial_x \phi_2, \partial_x \phi_3) = (1, 0, \partial_x f)$$
$$(\partial_y \phi_1, \partial_y \phi_2, \partial_y \phi_3) = (0, 1, \partial_y f).$$

Daraus folgt, dass das Differential $D_{(x,y)}\phi$ in jedem Punkt injektiv ist. Schließlich ist die Projektion $\pi : (x, y, z) \to (x, y)$ stetig und ihre Einschränkung auf den Graphen eine Umkehrabbildung zu ϕ. Deshalb ist ϕ ein Homöomorphismus. □

Seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann schreiben wir für $a \in N$

$$f^{-1}(a) = \{x \in M \mid f(x) = a\}.$$

Hier bedeutet $f^{-1}(a)$ nicht, dass f invertierbar ist, sondern das ist nur eine Schreibweise für das Urbild eines Punktes.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Dann ist der **Gradient** von f im Punkt x definiert als der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Definition 2.7. Sei $f : U \to \mathbb{R}$, mit $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt **regulärer Wert**, falls in jedem Punkt $x \in f^{-1}(a)$ der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ ungleich Null ist.

Insbesondere sind alle Punkte a, die nicht im Bild von U liegen, reguläre Werte.

Satz 2.8. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$, mit $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, eine differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist das Urbild $f^{-1}(a)$ eine reguläre Fläche.*

Beweis. Das folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, [1, Proposition 3.1.6], [2, Proposition 2, Kapitel 2-2]. □

Beispiel 2.9. Die Sphäre S^2 ist das Urbild von 1 unter der differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Es gilt

$$\partial_x f = 2x, \quad \partial_y f = 2y, \quad \partial_z f = 2z.$$

Der Gradient von f verschwindet nur im Punkt $(0, 0, 0)$. Da dieser Punkt nicht zu $f^{-1}(1)$ gehört, ist 1 ein regulärer Wert. Das gibt einen neuen Beweis dafür, dass S^2 eine reguläre Fläche ist.

Beispiel 2.10. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(x, y, z) = -(x^2 + y^2) + z^2.$$

Analog zu oben verschwindet $\operatorname{grad} f$ nur im Ursprung. Daher ist 1 ein regulärer Wert. Das Urbild $H = f^{-1}(1)$ heißt **zweischaliges Hyperboloid**. Im Gegensatz zur Sphäre und zur Ebene ist H nicht wegzusammenhängend: Es gibt Punkte in H mit $z > 0$ und $z < 0$ aber keinen mit $z = 0$. Gäbe es einen Weg zwischen den Punkten mit $z > 0$ und $z < 0$, dann müsste es nach dem Zwischenwertsatz auch einen mit $z = 0$ geben. Das ist ein Widerspruch. Außerdem ist H nicht kompakt, da nicht beschränkt.

Beispiel 2.11. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2,$$

wobei $a > 0$ eine beliebige Konstante ist. Sei $0 < r < a$ eine beliebige positive Zahl. Wir betrachten $T^2 = f^{-1}(r^2)$, d.h. die Menge aller Punkte mit

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Man kann nachprüfen, dass r^2 ein regulärer Wert von f ist. Um die Fläche zu beschreiben führen wir Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) ein mit $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$. Dann gilt

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

d.h.

$$(\rho - a)^2 + z^2 = r^2.$$

In der ρ-z-Ebene ist das ein Kreis um den Punkt $(a, 0)$ vom Radius r. Die Fläche bekommt man, indem man diesen Kreis für alle Winkel ϕ betrachtet, d.h. um die z-Achse rotiert. Deshalb ist T^2 ein **Torus**. Der Torus sieht aus wie die Oberfläche eines Doughnuts oder eines Autoreifens. Wie die Sphäre ist der Torus ist eine kompakte Fläche.

2.2 Differenzierbare Abbildungen auf Flächen

Es kommt häufig vor, dass sich zwei Kartenumgebungen überschneiden. Man bekommt dann eine Abbildung zwischen offenen Mengen im $\mathbb{R}^2$, die man **Kartenwechsel** nennt.

Satz 2.12. *Seien S eine reguläre Fläche und $\phi : U \to S$ und $\psi : V \to S$ zwei Karten von S so dass $W = \phi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Dann ist der Kartenwechsel $\tau = \psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(W) \to \psi^{-1}(W)$ ein Diffeomomorphismus zwischen offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Die Abbildung $\tau = \psi^{-1} \circ \phi$ ist ein Homöomorphismus, da sie eine Verkettung von Homömorphismen ist. Man kann analog nicht schließen, dass τ ein Diffeomorphismus ist, da differenzierbare Abbildungen bisher nicht auf regulären Flächen, sondern nur auf offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ definiert wurden. Das heißt man kann nicht sagen, dass ψ^{-1} differenzierbar ist.

Die Idee für den Beweis ist, die Abbildung $\psi^{-1} : W \to \psi^{-1}(W)$ zu einer differenzierbaren Abbildung F^{-1}, definiert auf einer offenen Umgebung in $\mathbb{R}^3$, auszudehnen.

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $W = \phi(U) = \psi(V)$. Dann ist τ die Abbildung $\psi^{-1} \circ \phi : U \to V$. Sei $p \in U$. Wir wollen zunächst zeigen, dass τ im Punkt p differenzierbar ist. Sei $q = \tau(p) \in V$. Da ψ eine Karte ist, sind die Vektoren

$$(\partial_x \psi_1, \partial_x \psi_2, \partial_x \psi_3) \quad \text{und} \quad (\partial_y \psi_1, \partial_y \psi_2, \partial_y \psi_3)$$

in q nicht parallel. Dann sind bereits zwei Komponenten nicht parallel, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die zwei ersten.

Sei $F : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(x, y, t) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y) + t).$$

Auf $V \times 0$ stimmt F mit ψ überein. Die Jacobi-Matrix von F ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x \psi_1 & \partial_y \psi_1 & 0 \\ \partial_x \psi_2 & \partial_y \psi_2 & 0 \\ \partial_x \psi_3 & \partial_y \psi_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Jacobi-Matrix sind nach Konstruktion im Punkt q linear unabhängig. Nach dem Umkehrsatz existiert eine offene Umgebung A von q in $V \times \mathbb{R}$ und eine offene Umgebung B von $F(q) = \psi(q)$ in $\mathbb{R}^3$, so dass $F|_A : A \to B$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrung F^{-1}. Das Bild von $A \cap (V \times 0)$ unter F ist

$B \cap W$. Auf $B \cap W$ stimmt F^{-1} mit ψ^{-1} überein. Da ϕ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $N \subset U$ von p, so dass $\phi(N) \subset B \cap W$. Auf N gilt

$$\tau = \psi^{-1} \circ \phi = F^{-1} \circ \phi.$$

Diese Abbildung ist als Verkettung von differenzierbaren Abbildungen auf N differenzierbar. Analog schließt man, dass τ^{-1} differenzierbar ist. Deshalb ist τ ein Diffeomorphismus. □

Dieser Satz folgt auch aus einem allgemeineren Satz:

Satz 2.13. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\phi : U \to S$ eine Karte. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : V \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $f(V) \subset \phi(U)$. Dann ist f als Abbildung von V nach $\mathbb{R}^3$ differenzierbar genau dann, wenn $\phi^{-1} \circ f : V \to U$ differenzierbar ist.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie von Satz 2.12. Siehe [1, Proposition 3.19]. □

Wegen Satz 2.12 kann man die Differenzierbarkeit von Funktion auf einer Fläche definieren.

Definition 2.14. Sei S eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann heißt f **differenzierbar in $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$** falls es eine Karte $\phi : U \to S$ gibt mit $p \in \phi(U)$ so dass die Abbildung $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\phi^{-1}(p)$ ist. Die Abbildung f heißt **differenzierbar** falls sie in allen Punkten von S differenzierbar ist.

Da $f \circ \phi$ auf einer offenen Menge im $\mathbb{R}^2$ definiert ist, ist der Begriff der Differenzierbarkeit für sie bereits bekannt.

Bemerkung 2.15. Die Definition der Differenzierbarkeit hängt nicht von der Wahl der Karte ab: Ist $\psi : V \to S$ eine weitere Karte mit $p \in \psi(V)$, dann ist $f \circ \psi = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$ ebenfalls differenzierbar in $\psi^{-1}(p)$, da nach Annahme $f \circ \phi$ und nach dem Satz $\phi^{-1} \circ \psi$ differenzierbar sind.

Analog kann man auch die Differenzierbarkeit einer Abbildung zwischen zwei Flächen definieren.

Definition 2.16. Seien M und N reguläre Flächen und $f : M \to N$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f **differenzierbar in $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$** falls es eine Karte $\psi : V \to N$ und eine Karte $\phi : U \to M$ gibt mit $p \in \phi(U)$ und $f(\phi(U)) \subset \psi(V)$ so dass die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \to V$ differenzierbar in $\phi^{-1}(p)$ ist. Die Abbildung f heißt **differenzierbar** falls sie in allen Punkten von M differenzierbar ist.

Die folgenden differenzierbaren Abbildungen sind besonders wichtig.

Definition 2.17. Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen regulären Flächen heißt **Diffeomorphismus** falls f bijektiv und f sowie f^{-1} differenzierbar sind.

Beispiel 2.18. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $S \subset V$ eine reguläre Fläche. Sei $f : V \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $\phi : U \to S$ eine Karte, dann ist $f \circ \phi$ differenzierbar als Verkettung von differenzierbaren Abbildungen. Also ist die Einschränkung $f|_S : S \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung.

Beispiel 2.19. In der Situation des letzten Beispiels sei $S' \subset \mathbb{R}^3$ eine weitere reguläre Fläche und $f : V \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Abbildung mit $f(S) \subset S'$. Dann ist die Abbildung $f|_S : S \to S'$ differenzierbar, denn für eine Karte $\phi' : U' \to S'$ und eine Karte $\phi : U \to S$ mit $f(\phi(U)) \subset \phi'(U')$ ist $\phi'^{-1} \circ f \circ \phi : U \to U'$ differenzierbar, da $f \circ \phi$ differenzierbar ist und nach Satz 2.13.

Beispiel 2.20. Die Einheitssphäre ist diffeomorph zu jedem Ellipsoid.

Beispiel 2.21. Der Rand eines "verdickten" Knotens (=verknoteter Kreis) im $\mathbb{R}^3$ ist diffeomorph zum Torus.

2.3 Die Tangentialebene und das Differential

Definition 2.22. Ein **Tangentialvektor** an eine reguläre Fläche S im Punkt $p \in S$ ist ein Vektor $X \in \mathbb{R}^3$, so dass es eine differenzierbare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ gibt mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Die Menge aller Tangentialvektoren and eine Fläche im Punkt p heißt **Tangentialraum** T_pS.

Aus der Definition ist noch nicht klar, dass der Tangentialraum T_pS immer 2-dimensional ist. Das folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 2.23. *Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $\phi : U \to S$ eine Karte um p. Sei $q = \phi^{-1}(p)$. Dann gilt*

$$T_pS = \textit{Bild}\,(D_q\phi).$$

Beweis. Sei $X \in \text{Bild}\,(D_q\phi)$, d.h. es gibt ein $Y \in \mathbb{R}^2$ mit

$$X = D_q\phi(Y).$$

Sei $c(t) = \phi(q + tY)$. Für ein kleines $\epsilon > 0$ sind alle $q + tY \in U$ mit $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, da U offen ist. Also ist c auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert. Nach Definition von c ist

$$c(0) = \phi(q) = p$$

und
$$\dot{c}(0) = \frac{d}{dt}\phi(q + tY)|_{t=0} = D_q\phi(Y) = X.$$
Also ist nach Definition X ein Tangentialvektor an S im Punkt p, d.h. $X \in T_pS$.

Sei $X \in T_pS$. Dann gibt es eine Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Wir können nach Verkleinerung von ϵ annehmen, dass c ganz in $\phi(U)$ verläuft. Nach Satz 2.13 ist

$$\gamma = \phi^{-1} \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to U$$

eine differenzierbare Kurve in $U \subset \mathbb{R}^2$. Sei $Y = \dot{\gamma}(0)$. Dann gilt

$$D_q\phi(Y) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}c|_{t=0} = X.$$

Also ist X im Bild des Differentials. $\square$

Korollar 2.24. *Da die Kartenabbildung ϕ injektives Differential hat, ist der Tangentialraum in jedem Punkt einer regulären Fläche 2-dimensional.*

In folgendem Fall kann man den Tangentialraum direkt angeben: Sei $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $S = f^{-1}(a)$ das Urbild eines regulären Wertes. Dann ist S eine reguläre Fläche. In diesem Fall gilt:

Lemma 2.25. *Der Tangentialraum im Punkt $p \in S$ ist gegeben durch $T_pS = grad\, f(p)^{\perp}$.*

Beweis. Sei $X \in T_pS$. Dann können wir eine Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ wählen mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Da c in S verläuft gilt

$$(f \circ c)(t) = a, \quad \text{für alle } t.$$

Deshalb ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \\ &= (\partial_x f)\dot{c}_x + (\partial_y f)\dot{c}_y + (\partial_z f)\dot{c}_z \\ &= \langle \text{grad}\, f(c(0)), \dot{c}(0)\rangle \\ &= \langle \text{grad}\, f(p), X\rangle. \end{aligned}$$

Also ist X senkrecht auf grad f. Wir haben gezeigt, dass $T_pS \subset \text{grad}\, f(p)^{\perp}$. Da beide Vektorräume dieselbe Dimension haben, nämlich 2, sind sie gleich. $\square$

Beispiel 2.26. Die Sphäre kann beschrieben werden als $f^{-1}(1)$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Es gilt

$$\operatorname{grad} f(p) = 2(x, y, z) = 2p.$$

Deshalb ist die Tangentialebene T_pS^2 gerade das orthogonale Komplement des Vektors p.

Eine differenzierbare Abbildung zwischen Flächen definiert eine Abbildung auf den Tangentialräumen, das sogenannte Differential.

Definition 2.27. Seien M und N reguläre Flächen und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Für $p \in M$ ist das **Differential** von f in p die Abbildung

$$D_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$$

die folgendermaßen definiert ist: Zu X in T_pM wähle eine differenzierbare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Dann sei

$$D_pf(X) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)}N.$$

Die folgende Proposition zeigt, dass $D_pf(X)$ wohldefiniert ist, d.h. nur von X und nicht von der Wahl der Kurve abhängt, und dass das Differential eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen ist.

Proposition 2.28. *Sei $\phi : U \to M$ eine Karte um p und $\psi : V \to N$ eine Karte um $f(p)$, so dass $f(\phi(U)) \subset \psi(V)$. Sei $\overline{f}$ die Abbildung*

$$\overline{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \to V.$$

Sei $q = \phi^{-1}(p)$. Dann gilt

$$D_pf = D_{\overline{f}(q)}\psi \circ D_q\overline{f} \circ (D_q\phi)^{-1}.$$

Beweis. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{x}(0) = X$, die ganz in $\phi(U)$ verläuft. Dann definieren wir die Kurve

$$\gamma = \phi^{-1} \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to U.$$

Wie zuvor sieht man, dass $X = D_q\phi(\dot{\gamma}(0))$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
D_pf(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \phi \circ \gamma)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\psi \circ \overline{f} \circ \gamma)|_{t=0} \\
&= D_q(\psi \circ \overline{f})(\dot{\gamma}(0)) \\
&= D_q(\psi \circ \overline{f}) \circ (D_q\phi)^{-1}(X) \\
&= D_{\overline{f}(q)}\psi \circ D_qf \circ (D_q\phi)^{-1}(X).
\end{aligned}$$

□

2.4 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Definition 2.29. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein **Normalenfeld** auf S ist eine differenzierbare Abbildung $N : S \to \mathbb{R}^3$, so dass $N(p)$ senkrecht auf T_pS steht für alle $p \in S$. Ein Normalenfeld heißt Einheitsnormalenfeld, falls $\|N(p)\| = 1$ für alle $p \in S$ gilt. Eine reguläre Fläche heißt **orientierbar**, falls es auf ihr ein Einheitsnormalenfeld gibt.

Beispiel 2.30. Sei

$$S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

die x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$. Dann ist $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$ ein Einheitsnormalenfeld auf S. Deshalb ist die x-y-Ebene und analog jede Ebene orientierbar.

Beispiel 2.31. Sei $S = S^2$ die Einheitssphäre. Dann ist $N(x, y, z) = (x, y, z)$ ein Einheitsnormalenfeld. Die Sphäre ist also orientierbar.

Beispiel 2.32. Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Es hat nur eine Seite, keine Innen- oder Außenfläche.

2.5 Die erste Fundamentalform

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.33. Die Abbildung, die jedem Punkt $p \in S$ die Einschränkung

$$g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pS \times T_pS}$$

zuordnet, heißt **erste Fundamentalform** oder **induzierte Metrik** g von S. Statt g schreibt man auch oft I.

Mit der induzierten Metrik kann man in der Fläche Längen, Winkel und Flächeninhalte messen. Sei $\phi : U \to S$ eine Karte. Dann haben wir in jedem Punkt $p \in \phi(U)$ die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$, die eine Basis von T_pS bilden. Diese Vektoren sind definiert durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= D_q\phi(e_1)\\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= D_q\phi(e_2),\end{aligned}$$

wobei $q = \phi^{-1}(p)$.

Definition 2.34. Die **Komponenten** der ersten Fundmamentalform g in der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}g_{ij}(q) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(q), \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(q)\right\rangle.\end{aligned}$$

Die Matrix $(g_{ij}(q))$ ist symmetrisch und positiv definit. Sind

$$\begin{aligned}v &= v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\\ w &= w_1\frac{\partial}{\partial x_1} + w_2\frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

zwei beliebige Tangentialvektoren, dann gilt wegen der Bilinearität des Skalarprodukts

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} v_i w_j.$$

Beispiel 2.35. Sei S die x_1-x_2-Ebene. Wir wählen auf S die Karte ϕ, die durch die Abbildung

$$\phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0),$$

gegeben ist. In dieser (globalen) Karte berechnen sich die Komponenten der induzierten Metrik folgendermaßen:

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\rangle\\ &= \langle e_1, e_1\rangle = 1\\ g_{12} &= g_{21} = \langle e_1, e_2\rangle = 0\\ g_{22} &= \langle e_2, e_2\rangle = 1.\end{aligned}$$

Die Matrix der induzierten Metrik ist in diesen Koordinaten gegeben durch

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hängt nicht vom Punkt ab.

Beispiel 2.36. Wir betrachten wieder als S die x_1-x_2-Ebene, aber diesmal mit Polarkoordinaten

$$\phi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0),$$

die auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ definiert sind. Die Komponenten der induzierten Metrik berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial r} \right\rangle \\ &= \langle (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), (\cos\alpha, \sin\alpha, 0\rangle \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ g_{r\alpha} = g_{\alpha r} &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \right\rangle \\ &= \langle (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0)\rangle \\ &= -r\cos\alpha\sin\alpha + r\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ g_{\alpha\alpha} &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \right\rangle \\ &= \langle (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0), (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0)\rangle \\ &= r^2\sin\alpha^2 + r^2\cos^2\alpha = r^2. \end{aligned}$$

Die Matrix ist gegeben durch

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und hängt vom Punkt ab.

Beispiel 2.37. Wir betrachten die Einheitssphäre S^2 und wählen als Karte die Kugelkoordinaten

$$\phi(\theta, \alpha) = (\cos\theta\cos\alpha, \cos\theta\sin\alpha, \sin\theta).$$

Die Karte ϕ ist auf $U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ definiert. Das Bild ist alles von S^2 bis auf Nord- und Südpol und der 0-te Längengrad. Wir berechnen die Komponenten der induzierten Metrik:

$$\begin{aligned}
g_{\theta\theta} &= \langle(-\sin\theta\cos\alpha, -\sin\theta\sin\alpha, \cos\theta), (-\sin\theta\cos\alpha, -\sin\theta\sin\alpha, \cos\theta)\rangle \\
&= \sin^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta \\
&= 1 \\
g_{\theta\alpha} &= g_{\alpha,\theta} = \langle(-\sin\theta\cos\alpha, -\sin\theta\sin\alpha, \cos\theta), (-\cos\theta\sin\alpha, \cos\theta\cos\alpha, 0)\rangle \\
&= \sin\theta\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha - \sin\theta\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha \\
&= 0 \\
g_{\alpha\alpha} &= \langle(-\cos\theta\sin\alpha, \cos\theta\cos\alpha, 0), (-\cos\theta\sin\alpha, \cos\theta\cos\alpha, 0)\rangle \\
&= \cos^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\cos^2\alpha \\
&= \cos^2\theta.
\end{aligned}$$

Die Matrix ist von der Form

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

Wir wollen berechnen wie sich die Matrizen der induzierten Metrik unter einem Kartenwechsel verhalten. Seien $\phi : U \to S$ und $\psi : V \to S$ zwei Karten mit $\phi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ und Kartenwechsel $\tau = \psi^{-1} \circ \phi$. Seien x_1, x_2 die Koordinaten auf U, y_1, y_2 die Koordinaten auf V, g_{ij} die Komponenten der induzierten Metrik in der Karte ϕ und $\tilde{g}_{ij}$ die Komponenten in der Karte ψ. Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
g_{ij}(q) &= g\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(q), \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(q)\right) \\
&= g\left(\frac{\partial(\psi\circ\tau)}{\partial x_i}(q), \frac{\partial(\psi\circ\tau)}{\partial x_j}(q)\right) \\
&= g\left(\sum_k \frac{\partial\psi}{\partial y_k}(\tau(q))\frac{\partial\tau_k}{\partial x_i}(q), \sum_l \frac{\partial\psi}{\partial y_l}(\tau(q))\frac{\partial\tau_l}{\partial x_j}(q)\right) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial\tau_k}{\partial x_i}(q)\frac{\partial\tau_l}{\partial x_j}(q) g\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_k}(\tau(q)), \frac{\partial\psi}{\partial y_l}(\tau(q))\right) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial\tau_k}{\partial x_i}(q)\frac{\partial\tau_l}{\partial x_j}(q)\tilde{g}_{kl}(\tau(q)).
\end{aligned}$$

Sei $J_\tau(q)$ die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels, gegeben durch

$$J_\tau(q) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\tau_1 & \partial_{x_2}\tau_1 \\ \partial_{x_1}\tau_2 & \partial_{x_2}\tau_2 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man:

Proposition 2.38. *In der Situation von oben gilt für die Matrizen der induzierten Metrik:*

$$(g_{ij})(q) = J_\tau(q)^T(\tilde{g}_{kl}(\tau(q)))J_\tau(q).$$

Kapitel 3

Die zweite Fundamentalform und die Krümmung

3.1 Die zweite Fundamentalform

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche und N ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf S. Dann ist N eine differenzierbare Abbildung $N : S \to \mathbb{R}^3$ mit Bild in S^2. Also ist die Abbildung

$$N : S \to S^2$$

differenzierbar. Man nennt N auch **Gauß-Abbildung**. Wir betrachten das Differential

$$D_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

in einem Punkt $p \in S$. Es gilt

$$T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS.$$

Also kann D_pN als lineare Abbildung von T_pS nach T_pS aufgefasst werden.

Definition 3.1. Die lineare Abbildung

$$W_p : T_pS \to T_pS, \quad W_p(X) = -D_pN(X)$$

heißt **Weingarten-Abbildung**.

Das Vorzeichen der Weingarten-Abbildung hat historische Gründe. Nimmt man statt N als Normalenfeld $-N$, dann kehrt sich das Vorzeichen der Weingarten-Abbildung um.

Beispiel 3.2. Sei S die Einheitssphäre S^2. Wir betrachten das Einheitsnormalenfeld $N(p) = p$. Dann ist D_pN die Identität auf T_pS^2, also

$$W_p = -\mathrm{Id} : T_pS^2 \to T_pS^2.$$

Beispiel 3.3. Sei S die x-y-Ebene. Dann ist $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ ein Einheitsnormalenfeld. Da es konstant ist, gilt $W_p = 0$ für alle $p \in S$.

Beispiel 3.4. Sei S der Zylinder

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z \text{ beliebig}\}.$$

Dann ist $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ ein Einheitsnormalenfeld. Um die Weingarten-Abbildung zu berechnen, benötigen wir eine Basis von T_pS. Der Vektor $v_1 = (-y, x, 0)$ is tangential an den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ im Punkt (x, y, z). Deshalb ist v_1 und $v_2 = (0, 0, 1)$ eine Basis von T_pS. Wir berechnen W_p in dieser Basis:

$$\begin{aligned} W_p(v_2) &= W_p(0, 0, 1) = -D_pN(0, 0, 1) = -\frac{d}{dt}|_{t=0} N(x, y, z + t) \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}(x, y, 0) = 0. \end{aligned}$$

Um $W_p(v_1)$ zu berechnen, müssen wir v_1 als Geschwindigkeitsvektor einer Kurve darstellen. Wir wählen ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(\cos t_0, \sin t_0) = (x, y)$ und betrachten die Kurve

$$c(t) = (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z).$$

Dann gilt $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 0) = v_1$. Damit ist

$$\begin{aligned} W_p(v_1) &= W_p(-y, x, 0) = -D_pN(-y, x, 0) = -\frac{d}{dt}|_{t=0} N(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z) \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), 0) = -(-\sin t_0, \cos t_0, 0) \\ &= -v_1. \end{aligned}$$

In der Matrix v_1, v_2 hat W_p die Gestalt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz gibt einen Zusammenhang zwischen der Weingarten-Abbildung und der ersten Fundmamentalform.

Satz 3.5. *Die Weingarten-Abbildung ist selbstadjungiert bezüglich der induzierten Metrik, d.h.*

$$g(W_p(u), v) = g(u, W_p(v)), \quad \textit{für alle } u, v \in T_pS.$$

Beweis. Wegen der Linearität der Weingarten-Abbildung und der Bilinearität der induzierten Metrik genügt es diese Gleichung für Basisvektoren v_1, v_2 zu zeigen. Sei $\phi : U \to S$ eine Karte um p. Dann haben wir die Basisvektoren

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$
$$v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2},$$

die auf ganz $\phi(U)$ definiert sind. Es gilt

$$W_p(v_1) = -D_pN(v_1) = -\frac{d}{dt}|_{t=0} N(\phi(x_1 + t, x_2))$$
$$= -\frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_1}.$$

Analog ist

$$W_p(v_2) = -\frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_2}.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$g\left(\frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) = g\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_2}\right).$$

Da N senkrecht auf dem Tangentialraum in jedem Punkt ist, gilt

$$\left\langle N \circ \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\rangle = \left\langle N \circ \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right\rangle = 0.$$

Differenzieren dieser Gleichungen liefert

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\rangle + \left\langle N \circ \phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1}\right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right\rangle + \left\langle N \circ \phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right\rangle = 0.$$

Da ϕ beliebig of differenzierbar ist, gilt

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Damit gilt
$$\Big\langle \frac{\partial(N\circ\phi)}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial(N\circ\phi)}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big\rangle,$$
was zu zeigen war. □

Jede selbsadjungierte lineare Abbildung auf einem Vektorraum definiert eine symmetrische Bilinearform.

Definition 3.6. Die durch
$$II_p(X,Y) = g(W_p(X),Y)$$
definierte Abbildung $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ heißt **zweite Fundamentalform**. Sie ist symmetrisch und bilinear.

Symmetrisch bedeutet, dass
$$II_p(X,Y) = II_p(Y,X).$$
Das folgt aus der Selbstadjungiertheit der Weingarten-Abbildung. Im folgenden lassen wir den Index p an II_p und W_p oft weg.

3.2 Die Krümmung einer regulären Fläche

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche und N ein Einheitsnormalenfeld. Seien $p \in S$, $v \in T_pS$ ein Tangentialvektor und $c : (-\epsilon,\epsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und Geschwindigkeit $\dot c(0) = v$. Als Raumkurve hat c zur Zeit $t = 0$ die Beschleunigung $\ddot c(0)$. Die Krümmung der Kurve ist $\kappa(0) = \|\ddot c(0)\|$. Falls die Krümmung ungleich null ist, gilt
$$\ddot c(0) = \kappa(0) n(0),$$
wobei $n(0)$ der Normalenvektor ist. Die Krümmung der Kurve c besteht aus der Krümmung der Kurve in der Fläche S und der Krümmung von S selbst. Wir machen folgende Definition.

Definition 3.7. Die **Normalkrümmung** von S im Punkt p in Richtung v ist definiert durch
$$\kappa_{\text{nor}} = \langle \ddot c(0), N(p)\rangle = \begin{cases} \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle, & \text{falls } \kappa(0) \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \kappa(0) = 0 \end{cases}$$

A priori hängt die Normalkrümmung nicht nur von dem Geschwindigkeitsvektor v, sondern von der Kurve c selbst ab. Es gilt aber folgender Satz:

Satz 3.8 (Meusnier)**.** *In der Situation von oben gilt*

$$\kappa_{nor} = II(v, v),$$

wobei v der Geschwindigkeitsvektor von c ist. Insbesondere hängt die Normalkrümmung nur von dem Geschwindigkeitsvektor der Kurve c zur Zeit 0 ab, nicht von der speziellen Wahl der Kurve.

Beweis. Da die Kurve c in S verläuft, gilt

$$\langle N(c(t)), \dot{c}(t)\rangle = 0, \quad \text{für alle } -\epsilon \leq t \leq \epsilon.$$

Durch Ableiten nach der Zeit bekommen wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle N(c(t)), \dot{c}(t)\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}|_{t=0} N(c(t)), \dot{c}(0) \right\rangle + \langle N(p), \ddot{c}(0)\rangle \\ &= \langle D_p N(\dot{c}(0)), \dot{c}(0)\rangle + \kappa_{\text{nor}} \\ &= \langle -W_p(v), v\rangle + \kappa_{\text{nor}} \\ &= -II(v, v) + \kappa_{\text{nor}} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Ändern wir die Orientierung der Kurve c, so ändert sich die Normalkrümmung nicht, da

$$II(-v, -v) = II(v, v).$$

Ändern wir dagegen die Orientierung der Fläche, dann ändert die Normalkrümmung ihr Vorzeichen:

$$\langle \ddot{c}(0), -N(p)\rangle = -\langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle.$$

3.3 Die Hauptkrümmungen

Da die Weingarten-Abbildung selbstadjungiert ist, kann man in jedem Punkt $p \in S$ eine Orthonormalbasis X_1, X_2 von T_pS finden, die aus Eigenvektoren besteht, d.h.

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Definition 3.9. Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen **Hauptkrümmungen** von S im Punkt p. Die Eigenvektoren X_1 und X_2 zu den Eigenwerten κ_1 und κ_2 heißen **Hauptkrümmungsrichtungen**. Wir verwenden die Konvention, dass $\kappa_1 \leq \kappa_2$.

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen den Hauptkrümmungen und der Normalkrümmung herstellen. Sei $X \in T_pS$ ein beliebiger Tangentialvektor der Länge eins und ϕ der Winkel zwischen X und X_1. Da X_1, X_2 eine Orthonormalbasis sind, gilt

$$X = \cos\phi X_1 + \sin\phi X_2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} II(X,X) &= g(W(X),X) = g(\cos\phi W(X_1) + \sin\phi W(X_2), X) \\ &= g(\cos\phi\kappa_1 X_1 + \sin\phi\kappa_2 X_2, \cos\phi X_1 + \sin\phi X_2) \\ &= \cos^2\phi\kappa_1 + \sin^2\phi\kappa_2. \end{aligned}$$

Diese Funktion von ϕ hat Minimum κ_1 und Maximum κ_2.

Proposition 3.10. *Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sind das Minimum und das Maximum der Normalkrümmungen $II(X,X)$ von S in p, wenn X alle Einheitstangentialvektoren durchläuft.*

Wir definieren zwei weitere wichtige Krümmungsbegriffe:

Definition 3.11. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen der orientierten regulären Fläche S im Punkt p. Dann ist

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

die **Gauß-Krümmung** und

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

die **mittlere Krümmung** von S in p.

Bei einem Wechsel der Orientierung kehren sich die Vorzeichen von κ_1 und κ_2 um. Daher kehrt sich auch das Vorzeichen der mittleren Krümmung um, während das Vorzeichen der Gauß-Krümmung gleich bleibt.

Beispiel 3.12. Sei S die x-y-Ebene. Da $W = 0$ in jedem Punkt, gilt $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung. Es gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.

Beispiel 3.13. Sei S die Einheitssphäre S^2. Mit dem nach außen zeigenden Normalenfeld gilt $W_p = -\mathrm{Id}$, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2 = -1$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung. Es gilt $K \equiv 1$ und $H \equiv -1$.

Beispiel 3.14. Sei S der Zylinder mit dem nach außen zeigenden Normalenfeld. Im Punkt $p = (x, y, z)$ hat man die Basis $X_1 = (-y, x, 0)$ und $X_2 = (0, 0, 1)$. Diese bilden Hauptkrümmungsrichtungen mit $\kappa_1 = 1$ und $\kappa_2 = 0$. Es folgt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.

Kapitel 4

Die kovariante Ableitung

4.1 Die kovariante Ableitung längs einer Kurve

Sei im folgenden S immer eine reguläre Fläche, nicht unbedingt orientiert.

Definition 4.1. Ein **Vektorfeld** auf S ist eine differenzierbare Abbildung $V : S \to \mathbb{R}^3$ mit $V(p) \in T_pS$ für alle $p \in S$. Die Menge aller Vektorfelder auf S wird mit $\mathfrak{X}(S)$ bezeichnet.

Sei $\phi : U \to S$ eine Karte. Dann hat man in jedem Punkt $p \in \phi(U)$ die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}.$$

Da diese eine Basis von T_pS bilden, kann man $V(p)$ schreiben als

$$V(p) = \sum_{j=1}^{2} \xi_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Die Koeffizientenfunktionen $\xi_j : \phi(U) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar.

Definition 4.2. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve in S. Ein **Vektorfeld an S längs c** ist eine differenzierbare Abbildung $V : I \to \mathbb{R}^3$, so dass $V(t) \in T_{c(t)}S$ für alle $t \in I$.

Beispiel 4.3. Das Geschwindigkeitsfeld $v(t) = \dot{c}(t)$ einer Kurve in S ist ein Vektorfeld an S längs c.

Wir möchten Vektorfelder v an die Fläche längs einer Kurve differenzieren, so dass die Ableitung wieder ein Vektorfeld an S längs c ist. Wenn wir einfach $\dot{v}(t)$ nehmen, bekommen wir im allgemeinen ein Vektorfeld, das nicht mehr tangential an die Fläche ist. Man nimmt deshalb statt $\dot{v}$ die Projektion von $\dot{v}$ auf den Tangentialraum. Das nennt man die kovariante Ableitung.

Definition 4.4. Für jeden Punkt $p \in S$ sei $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS$ die **Orthogonalprojektion** auf den Tangentialraum. Ist $N(p)$ einer der beiden Einheitsnormalen an S im Punkt p, so gilt

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p).$$

Dies hängt nicht von der Wahl von $N(p)$ ab.

Damit können wir definieren:

Definition 4.5. Sei $c : I \to S$ eine Kurve und $V : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld an S längs c. Dann heißt

$$\frac{DV(t)}{dt} = \Pi_{c(t)}(\dot{V}(t))$$

die **kovariante Ableitung** des Vektorfeldes V. Die kovariante Ableitung ist wieder ein Vektorfeld an die Fläche längs der Kurve.

Beispiel 4.6. Sei S die Einheitssphäre S^2 und c die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to S^2, c(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Das Bild von c ist der Äquator von S^2. Die Geschwindigkeit

$$v(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

ist ein Vektorfeld an die Sphäre längs der Kurve. Wir wollen die kovariante Ableitung von v bestimmen. Es gilt

$$\dot{v}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -c(t).$$

Daher steht $\dot{v}(t)$ senkrecht auf $T_{c(t)}S^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es gilt $\Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) = 0$, d.h.

$$\frac{Dv(t)}{dt} = 0.$$

Eine Kurve $c(t)$ in einer Fläche, so dass diese Gleichung für die Geschwindigkeit gilt, nennt man **Geodäte**.

Wir beweisen einige Rechenregeln für die kovariante Ableitung.

Lemma 4.7. *Seien $c : I \to S$ eine Kurve, $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und v, w Vektorfelder an S längs c. Dann gilt:*

(a) Additivität:

$$\frac{D}{dt}(v+w) = \frac{Dv}{dt} + \frac{Dw}{dt}.$$

(b) Produktregel I:

$$\frac{D}{dt}(fv) = \dot{f}v + f\frac{Dv}{dt}.$$

(c) Produktregel II:

$$\frac{d}{dt}g(v,w) = g\left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + g\left(v, \frac{Dw}{dt}\right).$$

Die Ausdrücke sind auf der linken und rechten Seite jeweils zum Zeitpunkt t zu nehmen.

Beweis. Die Eigenschaft (a) ist klar, da die Projektion auf den Tangentialraum linear ist. Zu (b):

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(fv) &= \Pi_{c(t)}\left(\frac{d}{dt}(fv)\right)\\ &= \Pi_{c(t)}\left(\dot{f}v + f\dot{v}\right)\\ &= \dot{f}v + f\frac{Dv}{dt}.\end{aligned}$$

Zu (c): Es gilt

$$g(\dot{v}, w) = g\left(\frac{Dv}{dt}, w\right)$$

da w tangential an S ist und $\frac{Dv}{dt}$ die Komponente tangential an S von $\dot{v}$ ist. Da

$$\frac{d}{dt}g(v,w) = g(\dot{v}, w) + g(v, \dot{w})$$

ist, folgt die Behauptung. □

4.2 Die Christoffel-Symbole

Sei $\phi : U \to S$ eine Karte und $p \in S$ ein Punkt mit Koordinaten $q = \phi^{-1}(p) = (x_1, x_2)$. Durch den Punkt p laufen zwei Kurven

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \phi(x_1 + t, x_2) \\ c_2(t) &= \phi(x_1, x_2 + t). \end{aligned}$$

Wir können die Basis-Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ entlang dieser Kurven betrachten.

Definition 4.8. Wir definieren

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ c_i\right)(0) \quad \text{(kovariante Ableitung entlang } c_i \text{ zur Zeit } t = 0)$$

und die **Christoffel-Symbole** $\Gamma_{ik}^k : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(q) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Lemma 4.9. *Es gilt*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

und damit die Symmetrie

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \Pi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) \\ &= \Pi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

□

Wir können die Christoffel-Symbole durch die induzierte Metrik ausdrücken. Seien g_{ij} die Komponenten der Metrik definiert durch

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

und g^{ki} die Komponenten der inversen Matrix zu (g_{ij}), so dass

$$\sum_{i=1}^{2} g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{falls } k \neq j. \end{cases}$$

Satz 4.10. *Für die Christoffel-Symbole gilt die Formel*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right) g^{mk}.$$

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= g \left(\sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l(q) \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{im}^l(q) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma_{ij}^l g_{lm} + \Gamma_{im}^l g_{jl} \right). \end{aligned}$$

Durch vertauschen der Indizes erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} &= \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma_{ji}^l g_{lm} + \Gamma_{jm}^l g_{il} \right) \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} &= \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma_{mi}^l g_{lj} + \Gamma_{mj}^l g_{il} \right). \end{aligned}$$

Durch Addition und beachten der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes erhalten wir

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} = 2 \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l g_{lm}.$$

Durch Dividieren mit 2, Multiplizieren mit g^{mk} und Summieren über m erhalten wir wegen $\sum_{m=1}^{2} g_{lm} g^{mk} = \delta_l^k$ die angegebene Formel. □

4.3 Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Wir definieren jetzt eine allgemeine kovariante Ableitung $\nabla_A B$ für Vektorfelder A, B auf S.

Definition 4.11. Seien A, B Vektorfelder auf S. Wähle eine Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ mit $\dot{c}(0) = A_p$. Dann setzt man

$$\nabla_A B(p) = \frac{D}{dt}(B \circ c)(0) \in T_p S.$$

Das ist die **kovariante Ableitung** von B in Richtung A.

Dies verallgemeinert die Definition von $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Wir berechnen die kovariante Ableitung $\nabla_A B$ von zwei Vektorfeldern A, B in einer Karte $\phi : U \to S$. Sei $c : I \to S$ die Kurve tangential an A_p und $\widetilde{c} = \phi^{-1} \circ c$. Seien α_j und β_i die durch

$$A = \sum_j \alpha_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$
$$B = \sum_i \beta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

definierten Komponenten.

Lemma 4.12. *Es gilt* $\alpha_j = \frac{d\widetilde{c}_j}{dt}$.

Beweis. Es gilt $c = \phi \circ \widetilde{c}$ und deshalb

$$A = \frac{dc}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{d\widetilde{c}_j}{dt}.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

Proposition 4.13. *Es gilt*

$$\nabla_A B = \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial \beta_k}{\partial x_j} \alpha_j + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \beta_i \alpha_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\nabla_A B = \Pi_p \left(\frac{d}{dt}(B \circ c) \right).$$

Es gilt

$$B \circ c(t) = \sum_i \left(\beta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) (\widetilde{c}(t)).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(B \circ c) &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \beta_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{d\widetilde{c}_j}{dt} \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \beta_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \alpha_j. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \nabla_A B &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \beta_i \Pi_p \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) \alpha_j \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \beta_i \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \alpha_j \\ &= \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial \beta_k}{\partial x_j} \alpha_j + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \beta_i \alpha_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir eine Formel vom letzten Mal benutzt und im letzten Schritt den Index i im ersten Term umbenannt in k. □

Korollar 4.14. *Die kovariante Ableitung $\nabla_A B(p)$ hängt nur von A_p und nicht von der Wahl der Kurve c ab. Außerdem ist $\nabla_A B$ wieder ein differenzierbares Vektorfeld.*

Man hat deshalb eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S), (A, B) \mapsto \nabla_A B.$$

Definition 4.15. Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und v ein Tangentialvektor im Punkt p. Dann schreiben wir

$$\partial_v f(p) = D_p f(v)$$

für die **Richtungsableitung** von f im Punkt p.

Mit der lokalen Formel für die kovariante Ableitung beweist man auch die Aussagen des folgenden Satzes:

Satz 4.16. *Seien V, W, X, Y Vektorfelder auf S, $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und α, β reelle Zahlen. Dann gilt:*

(a) Linearität I:
$$\nabla_V(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_V X + \beta \nabla_V Y.$$

(b) Produktregel I:
$$\nabla_V(fX) = (\partial_v f)X + f\nabla_V X.$$

(c) Produktregel II:
$$\partial_v g(X, Y) = g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y).$$

(d) Linearität II:
$$\nabla_{(\alpha V + \beta W)} X = \alpha \nabla_V X + \beta \nabla_W X.$$

(e) Funktionen-Linearität:
$$\nabla_{fV} X = f\nabla_V X.$$

Dabei ist zu beachten, dass $\nabla_V X$ nur in V Funktionen-linear ist, nicht in X. Der Grund für die Funktionen-Linearität von $\nabla_A B$ in A ist, dass in der lokalen Formel keine Ableitungen von α_j vorkommen.

Kapitel 5

Der Krümmungstensor

Wir definieren zunchst die zweite kovariante Ableitung. Der Wert dieser Ableitung hängt von der Reihenfolge, in der differenziert wird, ab, d.h. die Richtungen der zweiten kovarianten Ableitung vertauschen nicht. Der Krümmungstensor mißt diese Nicht-Vertauschbarkeit.

5.1 Die zweite kovariante Ableitung

Im folgenden sei S eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Definition 5.1. Für Vektorfelder A, B, X auf S definieren wir die **zweite kovariante Ableitung** von X in Richtung A und B durch

$$\nabla^2_{A,B} X = \nabla_A(\nabla_B X) - \nabla_{\nabla_A B} X.$$

Wir wollen eine Formel für die zweite kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten herleiten. Sei $\phi : U \to S$ eine Karte und α_i, β_i und ξ_i die durch

$$A = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$
$$B = \sum_i \beta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$
$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

definierten Koeffizienten.

Proposition 5.2. *Die p-te Komponente der zweiten kovariante Ableitung $\nabla^2_{A,B}X$ ist:*

$$\left(\sum_{ij}\frac{\partial^2\xi_p}{\partial x_i\partial x_j}\alpha_i\beta_j+\sum_{ijk}\Gamma^p_{ij}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}(\alpha_j\beta_k+\alpha_k\beta_j)-\sum_{ijk}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\xi_p}{\partial x_k}\alpha_i\beta_j\right)$$
$$+\sum_{ijk}\left(\left(\frac{\partial\Gamma^p_{kj}}{\partial x_i}+\sum_l(\Gamma^p_{li}\Gamma^l_{kj}-\Gamma^p_{kl}\Gamma^l_{ij})\right)\alpha_i\beta_j\xi_k\right).$$

Beweis. Der Beweis besteht in einer direkten Berechnung der beiden Terme in der Definition der zweiten kovarianten Ableitung. Das Vektorfeld $\nabla_B X$ hat die Komponenten η_p gegeben durch

$$\eta_p=\sum_l\frac{\partial\xi_p}{\partial x_l}\beta_l+\sum_{ij}\Gamma^p_{ij}\xi_i\beta_j.$$

Damit folgt für die Komponenten von $\nabla_A(\nabla_B X)$:

$$\sum_m\frac{\partial\eta_p}{\partial x_m}\alpha_m+\sum_{qr}\Gamma^p_{qr}\eta_q\alpha_r=\sum_{ml}\left(\frac{\partial^2\xi_p}{\partial x_l\partial x_m}\beta_l\alpha_m+\frac{\partial\xi_p}{\partial x_l}\frac{\partial\beta_l}{\partial x_m}\alpha_m\right)$$
$$+\sum_{ijm}\left(\frac{\partial\Gamma^p_{ij}}{\partial x_m}\xi_i\beta_j\alpha_m+\Gamma^p_{ij}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_m}\beta_j\alpha_m+\Gamma^p_{ij}\xi_i\frac{\partial\beta_j}{\partial x_m}\alpha_m\right)$$
$$+\sum_{lqr}\Gamma^p_{qr}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_l}\beta_l\alpha_r+\sum_{ijqr}\Gamma^p_{qr}\Gamma^q_{ij}\xi_i\beta_j\alpha_r.$$

Das Vektorfeld $\nabla_A B$ hat die Komponenten μ_m gegeben durch

$$\mu_m=\sum_l\frac{\partial\beta_m}{\partial x_l}\alpha_l+\sum_{ij}\Gamma^m_{ij}\alpha_i\beta_j.$$

Damit folgt für die Komponenten von $\nabla_{\nabla_A B}X$:

$$\sum_m\frac{\partial\xi_p}{\partial x_m}\mu_m+\sum_{qr}\Gamma^p_{qr}\xi_q\mu_r=\sum_{ml}\frac{\partial\xi_p}{\partial x_m}\frac{\partial\beta_m}{\partial x_l}\alpha_l+\sum_{mij}\frac{\partial\xi_p}{\partial x_m}\Gamma^m_{ij}\alpha_i\beta_j$$
$$+\sum_{lqr}\Gamma^p_{qr}\xi_q\frac{\partial\beta_r}{\partial x_l}\alpha_l+\sum_{ijqr}\Gamma^p_{qr}\Gamma^r_{ij}\xi_q\alpha_i\beta_j.$$

Man überprüft dann, dass die Differenz die korrekte Formel ergibt, wobei man einige Indizes umbenennen muß. □

Da in dieser Formel keine Ableitungen der Komponenten von A und B vorkommen, folgt:

Korollar 5.3. *Der Wert der zweiten kovarianten Ableitung $\nabla^2_{A,B}X$ hängt im Punkt $p \in S$ nur von A_p und B_p und von den ersten zwei Ableitungen von X ab.*

Die kovariante Ableitung $\nabla^2_{A,B}X$ hängt nicht nur von X_p ab, sondern auch von dessen Ableitungen.

5.2 Der Riemannsche Krümmungstensor

Definition 5.4. Seien A, B, X Vektorfelder. Dann ist der **Riemannsche Krümmungstensor** R definiert durch

$$R(A,B)X = \nabla^2_{A,B}X - \nabla^2_{B,A}X.$$

Der Krümmungstensor mißt die Nicht-Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitungen.

Satz 5.5. *Sei*

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j} + \sum_m (\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^m_{ki}).$$

Dann gilt

$$R(A,B)X = \sum_{ijkl} R^l_{ijk}\alpha_i\beta_k\xi_k \frac{\partial \phi}{\partial x_l}.$$

Beweis. Wir verwenden Proposition 5.2. Die Terme, die Ableitungen von ξ_k enthalten, verschwinden, da sie symmetrisch in α_i und β_j sind. □

Aus dieser Formel für den Riemannschen Krümmungstensor folgt:

Korollar 5.6. *Der Wert von $R(A,B)X$ hängt im Punkt $p \in S$ nur von A_p, B_p und X_p ab. Es gilt:*

(a) R ist Funktionen-linear in jedem Argument.

(b) R is schiefsymmetrisch in den ersten beiden Argumenten:

$$R(A,B)X = -R(B,A)X.$$

Eine Abbildung auf Vektorfeldern die linear und Funktionen-linear in jedem Eintrag ist, nennt man einen **Tensor**. Da R Funktionen-linear ist, definiert es einen Tensor

$$R : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S), (A,B,X) \mapsto R(A,B)X.$$

5.3 Gauß-Gleichung und Theorema Egregium

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie man den Riemann Tensor aus den Christoffel-Symbolen berechnet. Wir leiten jetzt eine Formel zur Berechnung des Riemann Tensors aus der zweiten Fundamentalform und der Weingarten-Abbildung her. Wir nehmen an, dass S eine reguläre, orientierte Fläche ist mit Einheitsnormalenfeld N. Sei $\phi : U \to S$ eine Karte. Dann definieren wir die lokalen Komponenten der zweiten Fundamentalform und der Weingarten-Abbildung folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
II\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) &= h_{ij} \\
W\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) &= \sum_{k=1}^{2} w_i^k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}.
\end{aligned}
$$

Satz 5.7 (Gauß-Gleichung)**.** *Für den Riemannschen Krümmungstensor gilt:*

$$R(X,Y)Z = II(Y,Z)W(X) - II(X,Z)W(Y).$$

In lokalen Koordinaten bedeutet das:

$$R_{ijk}^l = h_{jk}w_i^l - h_{ik}w_j^l.$$

Beweis. Wir beweisen die lokale Formel. In den Übungen wurde gezeigt, dass

$$h_{ij} = \left\langle N \circ \phi, \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle.$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.9 folgt

$$\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \Pi_p\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Damit bekommen wir

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\phi}{\partial x_k} + h_{ij} \cdot (N \circ \phi).$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach x_l:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3\phi}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_k} \right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_l} \cdot (N \circ \phi) + h_{ij} \cdot \frac{\partial (N \circ \phi)}{\partial x_l} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \Gamma_{ij}^k \sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial \phi}{\partial x_m} + \text{Normalenanteil} \right) \\
&\quad + \text{Normalenanteil} + h_{ij} \cdot \left(-W \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) \right) \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_m} + \text{Normalenanteil}
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Schwarz bekommen wir, wenn wir die Ableitungen nach x_i und x_l vertauschen,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3\phi}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^3\phi}{\partial x_i \partial x_l \partial x_j} \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial x_i} + \sum_k (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m) - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \\
&\quad + \text{Normalenanteil} \\
&= \sum_m (R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m) \frac{\partial \phi}{\partial x_m} + \text{Normalenanteil}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m = 0.$$

Das ist bis auf Umbenennen der Indizes die Behauptung. □

Wir können jetzt einen Zusammenhang zwischen dem Riemann Tensor und der Gauß-Krümmung beweisen. Die Gauß-Krümmung war definiert als

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2,$$

wobei κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen im Punkt p waren, d.h. die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung W. In der linearen Algebra zeigt man, dass die Determinante der darstellenden Matrix einer linearen Abbildung $f : V \to V$ nicht von der Wahl einer Basis für den Vektorraum V abhängt. Da in der Eigenbasis die Weingarten-Abbildung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

hat, gilt $K(p) = \det(W_p)$. In einer beliebigen Orthonormalbasis v, w von T_pS hat wegen $II(v,w) = g(W(v), w)$ die darstellende Matrix von W die Gestalt

$$\begin{pmatrix} II(v,v) & II(v,w) \\ II(w,v) & II(w,w) \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man:

Lemma 5.8. *In einer Orthonormalbasis v, w von T_pS gilt*

$$K(p) = II(v,v)II(w,w) - II(v,w)II(w,v).$$

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5.9 (Theorema Egregium)**.** *Sei $p \in S$ ein Punkt und v, w eine Orthonormalbasis von T_pS. Dann gilt*

$$K(p) = g(R(v,w)w, v).$$

Beweis. Wegen der Gauß-Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} g(R(v,w)w, v) &= g(II(w,w)W(v) - II(v,w)W(w), v) \\ &= II(w,w)II(v,v) - II(v,w)II(w,v) \\ &= K(p). \end{aligned}$$

□

Da die Christoffel-Symbole aus der Metrik berechnet werden können und der Riemann Tensor aus den Christoffel-Symbolen, folgt:

Korollar 5.10. *Die Gauß-Krümmung kann aus der Metrik berechnet werden.*

Die Metrik kann von Bewohnern auf der Fläche aus Längen und Winkeln berechnet werden. Deshalb kann auch die Gauß-Krümmung von diesen Bewohnern berechnet werden. Man nennt Größen wie die Metrik, die Christoffel-Symbole, den Riemann Tensor und die Gauß-Krümmung **innere Größen** einer regulären Fläche.

Definition 5.11. Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen. Ein Diffeomorphismus $f : S_1 \to S_2$ heißt **Isometrie** falls

$$g_2(D_pf(v), D_pf(w)) = g_1(v,w)$$

für alle $p \in S_1$ und alle $v, w \in T_pS_1$. Eine **lokale Isometrie** ist eine Isometrie, die nur auf einer offenen Teilmenge von S_1 definiert ist.

Eine Isometrie ist eine Abbildung zwischen regulären Flächen, die Längen und Winkel erhält. Aus der Diskussion oben bekommen wir:

Korollar 5.12. *Ist $f : S_1 \to S_2$ eine Isometrie, dann gilt für die Gauß-Krümmung*

$$K_2(f(p)) = K_1(p)$$

für alle $p \in S_1$.

Da die Gauß-Krümmung der Sphäre konstant 1 und die der Ebene konstant 0 ist, folgt, dass es keine Isometrie (nicht einmal lokale Isometrie) zwischen der Sphäre und der Ebene geben kann. Es kann deshalb z.B. keine ebenen Karten der Erde geben, die sowohl Längen als auch Winkel erhalten.

Man kann auch den Riemann-Tensor aus der Gauß-Krümmung berechnen:

Satz 5.13. *Es gilt*

$$R(X,Y)Z = K(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

In lokalen Koordinaten gilt deshalb

$$R^l_{ijk} = K(g_{jk}\delta^l_i - g_{ik}\delta^l_j).$$

Beweis. Siehe [1, Lemma 4.3.11]. □

Der Krümmungstensor und die Gauß-Krümmung enthalten deshalb die gleiche Information über die Fläche.

Kapitel 6

Geodäten

Im folgenden sei S eine reguläre Fläche.

Definition 6.1. Sei I eine Intervall. Eine differenzierbare Kurve $c : I \to S$ heißt **Geodäte** oder **Geodätische**, falls

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle $t \in I$.

Geodäten haben folgende Eigenschaften:

Lemma 6.2. *Geodäten sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d.h.* $g(v(t), v(t))$ *ist konstant, wobei* $v(t) = \dot{c}(t)$.

Beweis. Nach einer Produktregel für die kovariante Ableitung gilt:

$$\frac{d}{dt}g(v(t), v(t)) = g\left(\frac{D}{dt}v(t), v(t)\right) + g\left(v(t), \frac{D}{dt}v(t)\right) = 0.$$

$\square$

Lemma 6.3. *Sei* $c : I \to S$ *eine Geodäte und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *Konstanten. Dann ist auch* $\widetilde{c}(t) = c(\alpha t + \beta)$ *eine Geodäte.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{c}}(t) &= \alpha\dot{c}(\alpha t + \beta)\\ \ddot{\widetilde{c}}(t) &= \alpha^2\ddot{c}(\alpha t + \beta).\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}\dot{\tilde{c}}(t) &= \Pi_{\tilde{c}(t)}\ddot{\tilde{c}}(t) \\
&= \Pi_{c(\alpha t+\beta)}\alpha^2\ddot{c}(\alpha t+\beta) \\
&= \alpha^2\frac{D}{dt}\dot{c}(\alpha t+\beta) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 6.4. *Seien S_1, S_2 reguläre Flächen und $f : S_1 \to S_2$ eine Isometrie. Ist $c : I \to S_1$ eine Geodäte, dann ist auch $f \circ c : I \to S_2$ eine Geodäte.*

Beweis. Sei $\phi : U \to S_1$ eine Karte. Dann ist auch $f \circ \phi : U \to S_2$ eine Karte. Die Komponenten der Metrik und damit der Christoffel-Symbole sind in beiden Karten dieselben. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 6.5. Sei S die x-y-Ebene. Dann stimmt die kovariante Ableitung mit der gewöhnlichen Ableitung überein, d.h. man hat

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t).$$

Die Geodäten sind deshalb genau die Kurven mit Beschleunigung null, d.h. die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufenen Geraden $c(t) = p + tv$.

Beispiel 6.6. Im Fall von S^2 war es eine Übungsaufgabe zu zeigen, dass von den Breitenkreisen nur der Äquator (mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen) eine Geodäte ist. Sei $c : I \to S^2$ ein beliebiger Großkreis, mit beliebiger konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Dann gibt es eine Drehung der Sphäre, die den Äquator auf diesen Großkreis abbildet. Da eine Rotation eine Isometrie ist, folgt dass jeder Großkreis eine Geodäte ist.

Bemerkung 6.7. Man kann zeigen, dass eine Kurve, die konstante Geschwindigkeit hat und die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, eine Geodäte ist. Die Umkehrung gilt nicht - ein einmal durchlaufener Großkreis ist nicht die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu sich selbst, sondern die konstante Kurve mit Länge null.

Wir wollen die Geodäten-Gleichung in lokalen Koordinaten betrachten. Sei $\phi : U \to S$ eine Karte. Ist $c : I \to \phi(U)$ eine Kurve, dann schreiben wir $u = \phi^{-1} \circ c$

für die entsprechende Kurve in U. Sei $v(t)$ ein Vektorfeld entlang c. Wir definieren die Komponenten

$$v(t) = \sum_{i=1}^{2} v_i(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(u(t)).$$

Lemma 6.8. *Für die kovariante Ableitung von v entlang c gilt:*

$$\frac{D}{dt} v(t) = \sum_k \left(\dot{v}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v_i \dot{u}_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

Beweis. Wir haben

$$\dot{v}(t) = \sum_i \left(\dot{v}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_i \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \dot{u}_j \right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt} v(t) &= \Pi_{c(t)} \dot{v}(t) \\
&= \sum_i \dot{v}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k v_i \dot{u}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \\
&= \sum_k \left(\dot{v}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v_i \dot{u}_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

□

Ist $c : I \to S$ eine Kurve und $u = \phi^{-1} \circ c$ die entsprechende Kurve in lokalen Koordinaten, dann gilt

$$\dot{c}(t) = \sum_i \dot{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Aus dem Lemma folgt:

Proposition 6.9. *Eine Kurve $c : I \to S$ ist eine Geodäte genau dann, wenn in Karten $\phi : U \to S$ für die Kurve $u = \phi^{-1} \circ c$ gilt:*

$$\ddot{u}_k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t) = 0, \quad \textit{für } k = 1, 2.$$

Das ist ein nicht-lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktionen $u_k(t)$. Aus dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen bekommt man:

Satz 6.10 (Existenz)**.** *Sei $p \in S$ ein Punkt und $v \in T_pS$ ein Tangentialvektor. Dann gibt es ein Intervall I um 0 und eine Geodäte $c : I \to S$ mit den Anfangsbedingungen*

$$c(0) = p, \dot{c}(0) = v.$$

Das Intervall kann ganz $\mathbb{R}$ sein, wie bei den Großkreisen auf S^2, muß aber nicht: Zum Beispiel würde auf der Einheitsscheibe

$$S = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

in der x-y-Ebene eine Geodäte bei beliebigen Anfangsbedigungen mit $v \neq 0$ in endlicher Zeit ins Leere laufen. Aus dem Eindeutigkeitssatz über Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt:

Satz 6.11 (Eindeutigkeit)**.** *Sei I ein Intervall um 0 und $c : I \to S$ eine Geodäte. Ist $c' : I \to S$ eine weitere Geodäte mit*

$$c(0) = c'(0), \dot{c}(0) = \dot{c'}(0),$$

dann gilt $c = c'$ auf dem ganzen Intervall I.

Beispiel 6.12. Da es auf S^2 zu jedem Punkt und in jede Richtung einen Großkreis gibt, folgt, dass die Großkreise die einzigen Geodäten auf der Sphäre sind.

Kapitel 7

Der Satz von Gauß-Bonnet

7.1 Riemannsche Metriken

Im folgenden sei S immer eine reguläre Fläche. Wir haben in vergangenen Kapiteln die induzierte Metrik oder erste Fundamentalform betrachtet. Man kann den Begriff der Metrik folgendermaßen verallgemeinern:

Definition 7.1. Eine **Riemannsche Metrik** g auf S ordnet jedem Punkt $p \in S$ ein euklidisches Skalarprodukt g_p auf dem Tangentialraum T_pS zu, so dass in jeder Karte $\phi : U \to S$ die Funktionen

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R},$$

definiert durch $g_{ij}(q) = g_{\phi(q)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)$, differenzierbar sind.

Beispiele für Riemannsche Metriken sind die induzierten Metriken. Es gibt aber noch andere Riemannsche Metriken auf regulären Flächen, die nicht von induzierten Metriken kommen. Man kann alle Begriffe der inneren Geometrie, die durch Formeln aus der induzierten Metrik berechnet werden können (Christoffel-Symbole, Riemannscher Krümmungstensor, Gauß-Krümmung) auch durch dieselben Formeln für allgemeine Riemannsche Metriken definieren. Man kann auch Geodäten für allgemeine Riemannsche Metriken definieren.

Beispiel 7.2. Sei $S = T^2$ der Torus. Eine Karte ist durch folgende Abbildung gegeben:

$$\phi(t, \alpha) = ((1 - r\cos\alpha)\cos t, (1 - r\cos\alpha)\sin t, r\sin\alpha)$$

mit $0 < \alpha < 2\pi, 0 < t < 2\pi$, wobei r eine Konstanten kleiner als 1 ist. Diese Karte überdeckt nicht den ganzen Torus. Man kann sie aber zu einer (nicht mehr injektiven) Abbildung ausdehnen, indem man $\alpha, t \in \mathbb{R}$ wählt. Die Vektorfelder $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ sind dann auf ganz T^2 wohldefiniert. Sie bilden in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes. Bezüglich der induzierten Metrik ist diese Basis nicht orthonormal. Man definiert nun eine Riemannsche Metrik, indem man festlegt, dass diese Basis orthonormal sein soll. Dann sind die Koeffizienten der Riemannschen Metrik in dieser Karte gegeben durch

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Christoffel-Symbole, die man für diese Riemannsche Metrik berechnen kann, verschwinden, da sie von den Ableitungen der Metrik abhängen. Deshalb verschwindet auch der Riemannsche Krümmungstensor. Damit gilt

$$K \equiv 0$$

für diese Riemannsche Metrik. Das gilt nicht für die Gauß-Krümmung der induzierten Metrik: Diese ist an manchen Punkten positiv und an anderen negativ.

Definition 7.3. Seien S_1, S_2 reguläre Flächen und $f : S_1 \to S_2$ ein Diffeomorphismus. Sei g eine Riemannsche Metrik auf S_2. Dann definiert man die **zurückgezogene Metrik** f^*g auf S_1 durch

$$(f^*g)_p(X, Y) = g_{f(p)}(D_p f(X), D_p f(Y))$$

für $p \in S_1$ und Tangentialvektoren $X, Y \in T_p S_1$.

Ist $\phi : U \to S_1$ eine Karte für S_1, dann ist $f \circ \phi : U \to S_2$ eine Karte für S_2. In diesen Karten haben g und f^*g dieselben Komponenten. Deshalb haben auch die Krümmungstensoren dieselben Komponenten. Daraus folgt insbesondere für die Gauß-Krümmungen

$$K_{f^*g} = K_g \circ f.$$

7.2 Integration auf Flächen

In diesem Abschnitt wollen wir beschreiben, wie man Funktionen über eine Fläche integriert. Sei g eine Riemannsche Metrik auf der regulären Fläche S und $\phi : U \to S$ eine Karte. Wir betrachten zunächst nur Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$, die außerhalb von $\phi(U)$ gleich Null sind.

Definition 7.4. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ mit $f|_{S \setminus \phi(U)} \equiv 0$ heißt **integrierbar**, falls die Funktion

$$U \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(\phi(x_1, x_2))\sqrt{\det(g_{ij}(x_1, x_2))}$$

integrierbar ist. Der Wert des Integrals ist

$$\int_S f\,dA = \int_U f(\phi(x_1,x_2))\sqrt{\det(g_{ij}(x_1,x_2))}dx_1dx_2.$$

Der Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1dx_2$$

heißt das **Flächenelement**.

Man kann zeigen, dass der Faktor $\sqrt{\det(g_{ij})}$ im Flächenelement dazu führt, dass das Integral unabhängig von der gewählten Karte ist. Dazu benutzt man die Transformationsformel für das Integral in der Ebene. Wir können jetzt das Integral einer beliebigen integrierbaren Funktion auf einer Fläche definieren.

Definition 7.5. Eine beliebige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt **integrierbar**, falls man f als Summe $f = f_1 + \ldots + f_k$ schreiben kann, wobei die $f_i : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sind, die außerhalb einer Kartenumgebung verschwinden. Der Wert des Integrals ist dann

$$\int_S f\,dA = \sum_{i=1}^{k} \int_S f_i\,dA.$$

Man kann zeigen, dass der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl der Zerlegung $f = f_1 + \ldots + f_k$ ist. Insbesondere definiert man:

Definition 7.6. Sei S eine reguläre Fläche. Ist die Funktion $f \equiv 1$ integrierbar, so heißt das Integral

$$A = \int_S dA$$

der **Flächeninhalt** von S.

Das Flächenelement und damit das Integral einer Funktion hängt von der Wahl der Riemannschen Metrik ab. Man kann als Riemannsche Metrik z.B. die induzierte Metrik vom $\mathbb{R}^3$ nehmen.

7.3 Der Satz von Gauß-Bonnet

Sei S eine kompakte, reguläre Fläche (kompakt heißt abgeschlossen und beschränkt, d.h. eine geschlossene Fläche, wie die Sphäre, im Gegensatz zu einer offenen, wie der Ebene). Auf S kann man eine Riemannsche Metrik wählen, z.B. die induzierte

Metrik. Für jede Metrik kann man die Gauß-Krümmung berechnen, die eine Funktion auf der Fläche ist. Diese Funktion hängt sehr stark von der Wahl der Metrik ab. Der **Satz von Gauß-Bonnet** besagt, dass aber das Integral

$$\int_S K\, dA$$

der Gauß-Krümmung über die Fläche nicht von der Wahl der Metrik abhängt. Außerdem ist der Wert dieses Integrals ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, das nur von der Topologie der Fläche abhängt. Dieses Vielfache ist die sogenannte **Euler-Charakteristik**, eine grundlegende topologische Invariante kompakter Flächen. Um die Euler-Charakteristik zu verstehen, muss man zuerst **Triangulierungen** der Fläche betrachten. Die Beweise in diesem Abschnitt sind relativ kompliziert. Man findet sie z.B. im Kapitel 6 in [1].

Definition 7.7. Ein Polyeder X ist eine endliche Menge von Dreiecken $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ im $\mathbb{R}^n$, so dass sich je zwei dieser Dreiecke

(a) gar nicht oder

(b) in genau einer Ecke oder

(c) in genau einer Kante

schneiden. Die Vereinigung dieser Dreiecke

$$|X| = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$$

heißt **geometrische Realisierung** von X.

Ist X ein Polyeder, dann definieren wir

$$\begin{aligned} e(X) &= \text{Anzahl der Ecken von } X \\ k(X) &= \text{Anzahl der Kanten von } X \\ f(X) &= \text{Anzahl der Dreiecke von } X. \end{aligned}$$

Definition 7.8. Die Zahl

$$\chi(X) = e(X) - k(X) + f(X)$$

heißt **Euler-Charakteristik** von X.

Merkregel für die Vorzeichen: sie sind gerade gegeben durch $(-1)^{\dim}$, wobei dim die Dimension des Objekts bezeichnet (0 für Ecken, 1 für Kanten, 2 für Dreiecke).

Definition 7.9. Sei S eine kompakte reguläre Fläche. Eine **Triangulierung** von S ist ein Paar (X, Φ) bestehend aus einem Polyeder X und einem Homöomorphismus

$$\Phi : |X| \to S$$

so dass für die Einschränkung $\Phi|_\Delta : \Delta \to \Phi(\Delta)$ auf jedes Dreieck Δ von X folgendes gilt: Es gibt eine offene Umgebung U von Δ in der von Δ aufgespannten Ebene und eine offene Umgebung V von $\Phi(\Delta)$ in S, so dass sich die Einschränkung von Φ zu einem Diffeomorphismus $U \to V$ fortsetzt.

Eine Triangulierung ist eine Zerlegung der Fläche in gekrümmte Dreiecke. Man kann zeigen, dass jede kompakte reguläre Fläche eine Triangulierung besitzt.

Definition 7.10. Ist (X, Φ) eine Triangulierung von S, dann setzt man

$$\chi(S) = \chi(X)$$

für die **Euler-Charakteristik** von S.

Die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche könnte a priori von der Triangulierung abhängen.

Satz 7.11. *Sei S eine kompakte Fläche. Dann hängt das Integral*

$$\int_S K\, dA$$

nicht von der Wahl der Riemannschen Metrik ab.

Diesen Satz beweist man, indem man die Variation von K bei Änderung der Riemannschen Metrik untersucht. Eine Folgerung ist:

Korollar 7.12. *Seien S_1, S_2 diffeomorphe kompakte Flächen. Dann gilt*

$$\int_{S_1} K\, dA = \int_{S_2} K\, dA$$

für alle Riemannschen Metriken auf S_1 und S_2.

Beweis. Nach dem vorherigen Satz genügt es diese Aussage für eine spezielle Riemannsche Metrik auf S_1 und S_2 zu beweisen. Die Aussage ist aber klar, falls man auf S_1 eine unter dem Diffeomorphismus zurückgezogene Metrik von S_2 betrachtet. $\square$

Wir können jetzt den Satz von Gauß-Bonnet (ohne Beweis) formulieren:

Satz 7.13 (Gauß-Bonnet)**.** *Sei S eine kompakte Fläche mit Riemannscher Metrik g. Sei K die Gauß-Krümmung von g. Dann gilt*

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(S).$$

Insbesondere hängt die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche nicht von der Triangulierung ab. Als weitere Folgerung erhält man:

Korollar 7.14. *Die Euler-Charakteristiken $\chi(S_1)$ und $\chi(S_2)$ zweier diffeomorpher kompakter Flächen sind gleich.*

Beispiel 7.15. Eine Triangulierung der S^2 bekommt man, indem man einen Tetraeder innerhalb der Sphäre radial nach außen projiziert. Diese Triangulierung hat 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Dreiecke. Die Euler-Charakteristik der Sphäre ist deshalb $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Es gilt

$$\int_{S^2} K\,dA = 4\pi$$

für jede Riemannsche Metrik auf S^2. Man beachte, dass die induzierte Metrik auf der Einheitssphäre S^2 konstante Gauß-Krümmung $K \equiv 1$ hat. Das stimmt mit diesem Integral überein, da die Einheitssphäre Fläche 4π hat.

Beispiel 7.16. Wir haben gesehen, dass der Torus T^2 eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung $K \equiv 0$ hat. Die Euler-Charakteristik von T^2 müßte deshalb 0 sein. Das sieht man, indem man sich den Torus vorstellt als Identifikation eines Quadrats entlang den beiden gegenüberliegenden Seiten. Teilt man das Quadrat durch die Diagonalen, bekommt man eine Triangulierung von T^2. Sie hat 2 Ecken, 6 Kanten und 4 Dreiecke. Deshalb ist $\chi(T^2)$ tatsächlich Null.

Als weiter Folgerung bekommt man:

Korollar 7.17. *Hat eine kompakte Fläche S eine Riemannsche Metrik mit konstanter negativer Gauß-Krümmung, dann ist $\chi(S)$ negativ.*

Es gibt solche Flächen: Man konstruiert sie, indem man an die Sphäre $g \geq 2$ Henkel anheftet (bei einem Henkel bekommt man den Torus). Die Zahl der Henkel g heißt **Geschlecht** der Fläche. Man kann zeigen, dass für die Euler-Charakteristik $\chi(S) = 2 - 2g$ gilt. Außerdem folgt aus der hyperbolischen Geometrie, dass Flächen mit $g \geq 2$ eine Riemannsche Metrik mit konstanter negativer Gauß-Krümmung haben.

Literaturverzeichnis

[1] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage, De Gruyter 2010.

[2] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall 1976.

[3] W. Kühnel, *Differentialgeometrie, Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2010.