Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Platzaufgaben

Platzaufgabe 1 Sei $T := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 - \frac{x}{3} \leqslant y \leqslant 1 \}$.

(a) Skizzieren Sie T in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(b) Begründen Sie, dass T ein Normalbereich bezüglich der x-Achse ist.
Berechnen Sie
$$\iint_T y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left(\int_{g(x)}^{h(x)} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$
mit geeigneten Funktionen $g(x)$ und $h(x)$.

(c) Begründen Sie, dass T ein Normalbereich bezüglich der y-Achse ist.
Berechnen Sie
$$\iint_T y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{g(y)}^{h(y)} y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$
mit geeigneten Funktionen $g(y)$ und $h(y)$.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c).

Platzaufgabe 2 Wir betrachten die Kurve $K := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4,\ y \geqslant 0 \}$.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Stellen Sie K als Graph einer Funktion $r(x)$ auf $[-2, 2]$ dar.

(c) Lassen Sie die Kurve K um die x-Achse rotieren. Der entstandene Drehkörper E ist ein Ellipsoid. Skizzieren sie E.

(d) Berechnen Sie das Volumen von E.

Platzaufgabe 3 Sei $J := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 2x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{x_2^2}{-x_1}$.

(a) Skizzieren Sie J.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in drei geeigenete Teilkurven K_1, K_2 und K_3 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(d) Berechnen Sie $\iint_J \operatorname{rot} g \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint_J \operatorname{rot} g(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(e) Vergleichen Sie die Resultate aus (c) und (d) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 30.10.24 / Do 31.10.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 29.10.24 im Ilias.

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y \leqslant 2,\ x \leqslant y \leqslant 2x \}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x - y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x - y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Hausaufgabe 2
Sei $K_1 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = \mathrm{e}^x \}$.
Sei $K_2 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2],\ y + \mathrm{e}x = 2\mathrm{e} \}$.

(a) Skizzieren Sie K_1 und K_2 in ein Koordinatensystem.

(b) Sei $K := K_1 \cup K_2$.
Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen von R.

Hausaufgabe 3
Sei $D := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ -x_1^2 + 2x_1 \leqslant x_2 \leqslant -x_1^2 + 2 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei K die geschlossene Kurve, die D berandet.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{-x_2}{x_1}$.

(a) Skizzieren Sie D. Parametrisieren Sie K positiv orientiert.

(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.