Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 7 Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant z \leqslant 1,\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

(a) Skizzieren Sie S als Teilmenge der Mantelfäche eines Kegels.

(b) Sei

$$\Phi : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 2 - r \end{pmatrix} .$$

Finden Sie eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi]$ mit $\Phi(J) = S$.

(c) Bestimmen Sie $\Phi_r(r, \varphi)$, $\Phi_\varphi(r, \varphi)$ und $\Phi_r(r, \varphi) \times \Phi_\varphi(r, \varphi)$.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S als

$$\mathrm{F}(S) = \iint_J |\Phi_r(r, \varphi) \times \Phi_\varphi(r, \varphi)| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \ .$$

Platzaufgabe 8 Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \right\}$.

Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, \pi],\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$. Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \left(\begin{smallmatrix} 2\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Überprüfen Sie: Es ist $\Phi(\varphi, \vartheta) \in S$ für $\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right)$ in J.

(c) Tatsächlich ist $\Phi(J) = S$. Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(d) Berechnen Sie $\iint_S -z \,\mathrm{d}O$.

Platzaufgabe 9 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$.

Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(r, \varphi) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - r^2\sin(\varphi)^2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Skizzieren Sie die Punkte $\Phi(0, 0)$, $\Phi(1, 0)$, $\Phi(1, \frac{\pi}{2})$, $\Phi(1, \pi)$, $\Phi(1, \frac{3\pi}{2})$ in $\mathbb{R}^3$.
Sei $S := \Phi(J)$. Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Markieren Sie den Punkt $\Phi(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ in der Skizze von S aus (b) und zeichnen Sie daran ansetzend die Vektoren $\Phi_r(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\Phi_\varphi(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\Phi_r(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \Phi_\varphi(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein.

(d) Es parametrisiert $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ einen Teil des Randes von J.

Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)(t)$ und $(\Phi \circ C)'(t)$. Zeichnen Sie in die Skizze aus (b) den Punkt $(\Phi \circ C)(0)$ und, daran ansetzend, den Vektor $(\Phi \circ C)'(0)$ ein.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 13.11.24 / Do 14.11.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 12.11.24 im Ilias.

Hausaufgabe 7 Sei $J := \{ \binom{\varphi}{\vartheta} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, 2\pi] \}$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{\vartheta} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (2+\sin(\vartheta))\cos(\varphi) \\ (2+\sin(\vartheta))\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.
Es ist $S := \Phi(J)$ ein Torus in $\mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie die Teilmengen $\{ \Phi(0, \vartheta) \,|\, \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\frac{\pi}{2}, \vartheta) \,|\, \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\pi, \vartheta) \,|\, \vartheta \in [0, 2\pi] \}$, $\{ \Phi(\frac{3\pi}{2}, \vartheta) \,|\, \vartheta \in [0, 2\pi] \}$ und $\{ \Phi(\varphi, 0) \,|\, \varphi \in [0, 2\pi] \}$ von S in ein gemeinsames x-y-z-Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.

Hausaufgabe 8 Sei $J := \{ \binom{\varphi}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, \pi],\ v \in [-2, 2] \}$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{v} \mapsto \Phi(\varphi, v) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ v \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\varphi, v)$, $\Phi_v(\varphi, v)$ und $\Phi_\varphi(\varphi, v) \times \Phi_v(\varphi, v)$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Berechnen Sie

$$\iint_S x + y^2 \,\mathrm{d}O.$$

Hausaufgabe 9 Wir begeben uns in die Situation von Platzaufgabe 8:
Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \right\}$.
Sei $J := \{ \binom{\varphi}{\vartheta} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi \in [0, \pi],\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$. Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{\vartheta} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie $S = \Phi(J)$ im x-y-z-Koordinatensystem wie in Platzaufgabe 8.(c).

(b) Markieren Sie den Punkt $\Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ in der Skizze aus (a) und zeichnen Sie daran ansetzend die Vektoren $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $\Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ und $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \times \Phi_\vartheta(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein.

(c) Es parametrisiert $C : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{0}{t}$ einen Teil des Randes von J.

Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)(t)$ und $(\Phi \circ C)'(t)$. Zeichnen Sie in die Skizze aus (a) den Punkt $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4})$ und, daran ansetzend, den Vektor $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$ ein.