Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

# Blatt 5

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 13** Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = y^2x^2 .$$

(a) Finden Sie eine konstante Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = y^2x^2$, $y(0) = 1$.

(d) Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Richtungsfelds: Dazu skizzieren Sie kleine Strecken der Steigung $y^2x^2$ an den Punkten $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, für welche $x \in \{-1,\ -0{,}5,\ 0,\ 0{,}5,\ 1\}$ und $y \in \{0,\ 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5\}$ ist.

(e) Zeichnen Sie die Graphen der Lösungen aus (a) und (c) in die Skizze aus (d) ein, indem Sie jeweils den Wert bei $x = 0$ betrachten und dann dem Richtungsfeld folgen.

**Platzaufgabe 14** Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = \frac{\sin(x)}{y} .$$

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\sin(x)}{y}, \quad y(0) = 1 .$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\sin(x)}{y}, \quad y(0) = -1 .$$

**Platzaufgabe 15** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{y}{2} = 1, \quad y(0) = 0 .$$

(a) Die Differentialgleichung kann als eine solche mit getrennten Variablen betrachtet werden. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems auf diese Weise.

(b) Die Differentialgleichung kann auch als linear inhomogen erster Ordnung behandelt werden.

(1) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(2) Finden Sie nun alle Lösungen von $y' + \frac{y}{2} = 1$ mittels Variation der Konstanten.

(3) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' + \frac{y}{2} = 1$ und $y(0) = 0$ unter Verwendung von (2).

Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

# Blatt 5

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 27.11.24 / Do 28.11.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 26.11.24 im Ilias.

**Hausaufgabe 13** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(x-1)y' + y^2 \;=\; 0$$

für $x \in \mathbb{R}_{>1}$ .

(a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

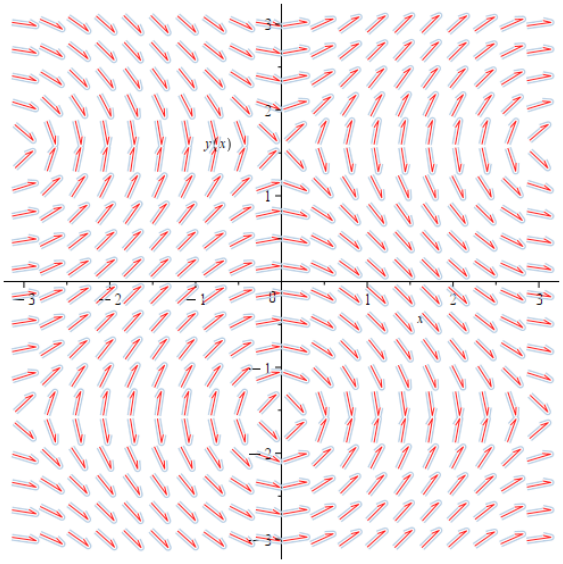
(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x-1)y' + y^2 \;=\; 0\,, \quad y(2) = 1.$$

**Hausaufgabe 14** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\,.$$

Das Richtungsfeld ist rechts dargestellt.




(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\,, \quad y(0) \;=\; 0\,.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \;=\; 0\,, \quad y(\tfrac{\pi}{4}) \;=\; 0\,.$$

(c) Überprüfen Sie: Es ist $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung – wie im Richtungsfeld bereits erkennbar.

**Hausaufgabe 15** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x^2} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x)\,,$$

wobei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ .

(a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen von $y' - \frac{y}{x^2} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x)$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{y}{x^2} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(x)\,, \quad y(\tfrac{\pi}{2}) \;=\; 1\,.$$