

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 5

Platzaufgaben

Platzaufgabe 13 Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

- (a) Finden Sie eine konstante Lösung dieser Differentialgleichung.
- (b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.
- (d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = -2$.
- (e) Skizzieren Sie das Richtungsfeld: Dazu skizzieren Sie kleine Strecken der Steigung $\frac{y}{x}$ an den Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, für welche $-2 \leq x \leq 2$ mit $x \neq 0$ ganzzahlig ist und für welche $-2 \leq y \leq 2$ ganzzahlig ist.
- (f) Zeichnen Sie die Graphen der Lösungen aus (c) und (d) in das Richtungsfeld aus (e) ein.

Platzaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = \frac{1}{2y(x^2 + 1)}.$$

- (a) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{2y(x^2 + 1)}, \quad y(0) = 1.$$

Platzaufgabe 15 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' - 2y = 3, \quad y(0) = 0.$$

- (a) Die Differentialgleichung kann als eine solche mit getrennten Variablen betrachtet werden. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems auf diese Weise.
- (b) Die Differentialgleichung kann auch als linear inhomogen erster Ordnung behandelt werden.
 - (1) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
 - (2) Finden Sie nun alle Lösungen von $y' - 2y = 3$ mittels Variation der Konstanten.
 - (3) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' - 2y = 3$ und $y(0) = 0$ unter Verwendung von (2).

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 5

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 29.11.23 / Do 30.11.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 28.11.23 im Ilias.

Hausaufgabe 13 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1}.$$

- (a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1}, \quad y(1) = 1.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) = 0,$$

wobei $y \in (0, \pi)$.

- (a) Sei $\arccos(x) := \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, definiert für $x \in [-1, +1]$.
Verifizieren Sie: Es ist $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
Verifizieren Sie: Es ist $\arccos(\cos(x)) = x$ für $x \in [0, \pi]$.
Skizzieren Sie den Graphen von $\arccos : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arccos(x)$.
- (b) Finden Sie alle konstanten Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.
- (c) Finden Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.
- (d) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Hausaufgabe 15 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y \cos(x) + \sin(2x).$$

- (a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Finden Sie alle Lösungen von $y' = y \cos(x) + \sin(2x)$.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y \cos(x) + \sin(2x), \quad y(\pi/2) = 0.$$