Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Platzaufgaben

Platzaufgabe 16 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung.

$$y^{(2)} - 2y = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie zwei Lösungen der Differentialgleichung. Bestimmen Sie die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}(x)$. Überprüfen Sie anhand der Determinante von $\mathrm{W}(0)$, ob ein Fundamentalsystem vorliegt.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Platzaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(2)} - 4y' + 8y = 0$$

(a) Hat das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung reelle Nullstellen?

(b) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \sin(2x)\mathrm{e}^{2x}$ und $h(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{2x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(c) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(x)$ für g, h. Überprüfen Sie anhand der Determinante von $\mathrm{W}(0)$, ob ein Fundamentalsystem vorliegt.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(\frac{\pi}{8}) = 2$ und $y'(\frac{\pi}{8}) = 1$.

Platzaufgabe 18 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung.

$$y'' + \frac{2}{x}y' = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = 1$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Bestimmen Sie für g, h die Wronskimatrix $\mathrm{W}(1)$.

Überprüfen Sie: g, h bilden ein Fundamentalsystem der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(d) Bestimmen Sie die Inverse der Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)^{-1}$.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten:

$$y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$$

unter Verwendung von (d).

Künzer, Bitzer, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 4.12.24 / Do 5.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 3.12.24 im Ilias.

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} + y^{(2)} - 2y^{(1)} = 0$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die betrachtete Differentialgleichung. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y^{(3)} + y^{(2)} - 2y^{(1)} = 0$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ und $y''(0) = 10$.

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 5y^{(2)} + 8y^{(1)} - 4y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g_1(x) = \mathrm{e}^x$, $g_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $g_3(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Bestimmen Sie für g_1, g_2, g_3 die Wronskimatrix $\mathrm{W}(1)$.

Überprüfen Sie: g_1, g_2, g_3 bilden ein Fundamentalsystem der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$ und $y''(1) = 5$.

Hausaufgabe 18 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind. Überprüfen Sie unter Zuhilfenahme der Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$, ob g, h ein Fundamentalsystem bilden.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{W}(1)^{-1}$. Finden Sie damit zwei Lösungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der Differentialgleichung, für welche gilt:

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = 1 & f_2(1) = 0 \\ f_1'(1) = 0 & f_2'(1) = 1. \end{array}$$

(d) Finden Sie d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = d_1f_1(x) + d_2f_2(x)$ die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(1) = 7$ und $y'(1) = -2$ löst.

Am Mi 04.12.2024 findet die Vortragsübung in V47.02 statt.