

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 19

Wir betrachten folgende Differentialgleichung.

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$. Berechnen Sie $p(3)$.
- (b) Berechnen Sie alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(X)$ in $\mathbb{C}$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.
- (c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- (d) Bestätigen Sie unter Verwendung der Wronski-Matrix $W(0)$ nochmals, dass es sich in (c) um ein Fundamentalsystem handelt.

Platzaufgabe 20 Sei $p(X) = X^2 + 2X$.

- (a) Berechnen Sie

$$p(D) \left(e^{-x} \cdot \frac{1}{x} \right) = (D^2 + 2D) \left(e^{-x} \cdot \frac{1}{x} \right) .$$

- (b) Bestimmen Sie $p(D - 1)$. Berechnen Sie

$$e^{-x} \cdot p(D - 1) \left(\frac{1}{x} \right) .$$

- (c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall die Verschiebungsregel von Heaviside.

Platzaufgabe 21 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 4x .$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 4x$ mittels eines Ansatzes nach Art der rechten Seite.
- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' - 4y' + 4y = 4x$.
- (d) Bestimmen Sie abermals eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 4x$, aber nun mittels Variation der Konstanten.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 11.12.24 / Do 12.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 10.12.24 im Ilias.

Hausaufgabe 19 Wir betrachten folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 7y^{(2)} + 15y' - 9y = 0$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie $p(3)$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.
- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- (c) Überprüfen Sie die Lösungen aus (b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.
- (d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -5$.

Hausaufgabe 20 Wir betrachten folgende Differentialgleichung.

$$y'' + y' - 2y = 27x^2 e^{-2x}$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 27x^2 e^{-2x}$.
- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 27x^2 e^{-2x}$.

Hausaufgabe 21 Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{x+2}{x^2+x} y' - \frac{1}{x^2+x} y = 2x + 2.$$

- (a) Überprüfen Sie: Es sind $f_1(x) := \frac{1}{x}$ und $f_2(x) := x + 2$ Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung unter Verwendung von (a).
- (c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der Differentialgleichung $y'' + \frac{x+2}{x^2+x} y' - \frac{1}{x^2+x} y = 2x + 2$.
- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + \frac{x+2}{x^2+x} y' - \frac{1}{x^2+x} y = 2x + 2$.