Künzer, Bitzer, Eppinger, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 8

Platzaufgaben

Platzaufgabe 22 Sei $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Parameter. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y \ = \ \cos(\omega x)\ .$$

Dabei kann ω als Frequenz der auf der rechten Seite angelegten Schwingung angesehen werden. Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch $p(X) = X^2 + 4 = (X - 2\mathrm{i})(X + 2\mathrm{i})$. Jede Lösung von $y'' + 4y = 0$ ist daher von der Form $c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Es kann $\omega_0 = 2$ als Eigenfrequenz angesehen werden.

(a) Wir suchen eine partikuläre Lösung von $y'' + 4y \ = \ \cos(\omega x)$.

Da $\cos(\omega x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x})$ ist, ist der Realteil einer partikulären Lösung von $y'' + 4y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ eine partikuläre Lösung von $y'' + 4y \ = \ \cos(\omega x)$.

Verwenden Sie zunächst einen Ansatz nach Art der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung von $y'' + 4y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ zu bestimmen. Dann nehmen Sie davon den Realteil.

(1) Fall $p(\mathrm{i}\omega) \neq 0$ (keine Resonanz).
Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' + 4y \ = \ \cos(\omega x)$.

(2) Fall $p(\mathrm{i}\omega) = 0$ (Resonanzfall).
Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' + 4y \ = \ \cos(\omega x)$.

(b) Skizzieren Sie den Graphen des Vorfaktors vor $\cos(\omega x)$ aus (a.1) in Abhängigkeit von ω. Wieso spricht man von Resonanz, wenn sich ω der Eigenfrequenz $\omega_0 = 2$ nähert?

Platzaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}(2t^2 + 5)$

(b) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{t-2})$

(c) $\mathcal{L}(\sin(3t))$

(d) $\mathcal{L}(\sinh(3t))$

Platzaufgabe 24 Finden Sie zu der jeweils gegebenen Funktion $F(s)$ die Funktion $f(t)$, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ hat. Gesucht ist also $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.
Falls erforderlich, führen Sie dazu zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) $F(s) = \dfrac{12}{s^3}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s}$

(c) $F(s) = \dfrac{s^2 + s}{(s^2 + 1)(s - 1)}$

(d) $F(s) = \dfrac{2s + 3}{(s + 1)^2}$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 8

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 18.12.24 / Do 19.12.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 17.12.24 im Ilias.

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'' - 2y' \;=\; x\sin(x)\mathrm{e}^x$$

(a) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$ unter Verwendung von (a).

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' - 2y' = x\sin(x)\mathrm{e}^x$.

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten und inversen Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}(\frac{1}{2}(t+2)^2\mathrm{e}^t)$

(b) $\mathcal{L}(\sin(t)\cos(2t))$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s-2}{s^2-4s+20}\right)$

Hausaufgabe 24 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y \;=\; t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.
Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.