Künzer, Bitzer, Eppinger, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 11

Platzaufgaben

Platzaufgabe 31 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \ 1 + x^2 \ .$$

Die Fourier-Reihe von f ist gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \left(1 + \frac{1}{3}\pi^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \ .$$

Sei

$$g(x) \ := \ \begin{cases} f'(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq (2k+1)\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } x = (2k+1)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \ . \end{cases}$$

(a) Begründen Sie anhand des Graphen von $f(x)$ aus Hausaufgabe 29, dass f stetig ist.
Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_g(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_g(\pi)$ durch Einsetzen von $x = \pi$ in $\mathrm{Fourier}_g(x)$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $g(x)$ für $-\pi < x < 3\pi$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_g(\pi)$ unter Verwendung von $\lim\limits_{x \to \pi - 0} g(x)$ und $\lim\limits_{x \to \pi + 0} g(x)$.
Vergleichen Sie die Resultate von (b) und (c).

(d) Sei $g_1(x)$ das erste Fourier-Polynom von $g(x)$. Sei $g_2(x)$ das zweite Fourier-Polynom von $g(x)$. Ist $\|g - g_1\| \geqslant \|g - g_2\|$?

Platzaufgabe 32 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi] \ . \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f(x)$ unter Verwendung von (a).

(c) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus (b), um $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ zu berechnen.

Platzaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ x & \text{für } x \in [0, \pi] \ . \end{cases}$$

Es ist $\mathrm{Fourier}_f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$.

(a) Sei $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ und $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ für $x \in \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie die Graphen von $g(x)$ und $h(x)$ für $x \in (-\pi, \pi)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_g(x)$ und $\mathrm{Fourier}_h(x)$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 11

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 22.01.25 / Do 23.01.25 in den Gruppenübungen oder bis Di 21.01.25 im Ilias.

Hausaufgabe 31 Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} t & \text{falls } x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{falls } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von f ist gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-\pi)(-1)^k - t}{\pi k} \sin(kx)$$

(a) Skizzieren Sie im Fall $t = 0$ den Graphen einer Stammfunktion von $f(x)$ für $x \in [-\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie t so, dass eine 2π-periodische Stammfunktion von f existiert. Bestimmen Sie die 2π-periodische Stammfunktion F von f mit $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $F(x)$ für $x \in [-\pi, 3\pi]$.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_F(x)$.

Hausaufgabe 32 Wie in Platzaufgabe 33 sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ x & \text{für } x \in [0, \pi]\ . \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ unter Verwendung von $\mathrm{Fourier}_f(x)$ aus Platzaufgabe 33.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ abermals, indem Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt nach Definition berechnen.

Hausaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $x \in (-\pi, \pi]$ gegeben ist durch

$$f(x) \ := \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in (-\pi, 0) \\ x^2 & \text{für } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{für } x = \pi\ . \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $-\pi < x < 3\pi$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus (b), um $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}((-1)^k \pi^2 k^2 - 2(-1)^k + 2)^2$ zu berechnen.