Künzer, Bitzer, Eppinger, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 13

Platzaufgaben

Platzaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) := 10\sin(x) + \sin(3x) \quad \text{für } x \in [0,\pi].$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.

(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ sowie in die Anfangs- und Randbedingungen.

(c) Überprüfen Sie: Die Funktion $u(x,1)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 := \frac{\pi}{2}$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} u(\frac{\pi}{2},t)$.

Platzaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,t) = 2, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$
$$u(x,0) = \sin(x) + 2 - 2\frac{x}{\pi} \quad \text{für } x \in [0,\pi] .$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{u}(x,t)$ für das Problem aus (a).

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Ausgangsproblems unter Verwendung von (b).

(d) Überprüfen Sie Ihre Lösung $u(x,t)$ aus (c) durch Einsetzen in $u_t = u_{xx}$.

Platzaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 2u_{xx} + r(x,t) ,$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$
$$u(x,0) = x \qquad\qquad \text{für } x \in (0,1) .$$

Sei mittels Fourier-Reihe $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi x)$ bekannt für $x \in (0,1)$.

(a) Sei nun $r(x,t) := 0$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx}$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen.

(b) Sei nun $r(x,t) := \sin(2\pi x)$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx} + \sin(2\pi x)$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen unter Verwendung von 8.2.10.

Blatt 13

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 05.02.25 / Do 06.02.25 in den Gruppenübungen oder bis Di 04.02.25 im Ilias.

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \tfrac{1}{7} u_{xx}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (2-x)^2 & \text{falls } 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{für } x \in [0,2].$$

Die Fourierkoeffizienten b_n der ungeraden 4-periodischen Fortsetzung von f sind für $n \geqslant 1$ gegeben durch $b_n = \frac{16}{\pi^3 n^3}(n \sin(\frac{n\pi}{2})\pi + (-1)^n - 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

(b) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (a) durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \frac{1}{7} u_{xx}$.

(c) Überprüfen Sie: Die Funktion $u(x,2)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = 1$. Verwenden Sie dazu, dass $b_n = 0$ ist für gerades n und dass $n\pi > 2$ ist für ungerades n.

Hausaufgabe 38 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 2u_{xx} + r(x,t)\ ,$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0, \quad u(2,t) &= 0 \quad \text{für } t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x(x-2) & \qquad\ \text{für } x \in [0,2]\ . \end{aligned}$$

Sei mittels Fourier-Reihe $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16((-1)^k - 1)}{\pi^3 k^3} \sin(k\frac{\pi}{2}x)$ bekannt für $x \in [0,2]$.

(a) Sei nun $r(x,t) := 0$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx}$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen.

(b) Sei nun $r(x,t) := 5\sin(3\frac{\pi}{2}x)$. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $u_t = 2u_{xx} + 5\sin(3\frac{\pi}{2}x)$ mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen.

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + 1$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) &= t \quad \text{für } t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 0 & \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\ . \end{aligned}$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{u}(x,t)$ für das Problem aus (a).

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Ausgangsproblems unter Verwendung von (b).