Künzer, Bitzer, Eppinger, Huber, Klingel, Krauß, Nottoli Wintersemester 2024/25

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 14

Platzaufgaben

Platzaufgabe 40 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^4}, \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

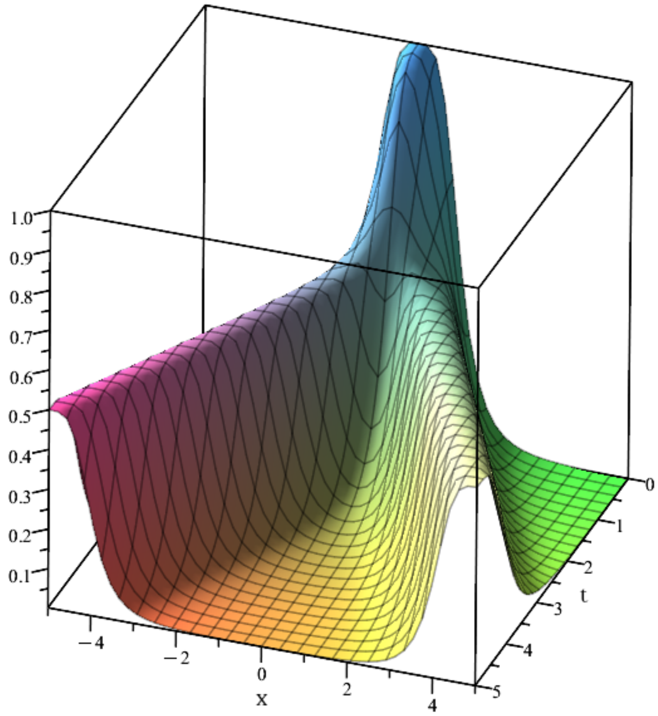
(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.

Der Graph der Lösung ist rechts ersichtlich.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} u(0,t)$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} u(t,t)$.

(d) Erklären Sie anhand des Graphen die unterschiedlichen Ergebnisse in (b) und (c).



Platzaufgabe 41 Wir betrachten die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = -4x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

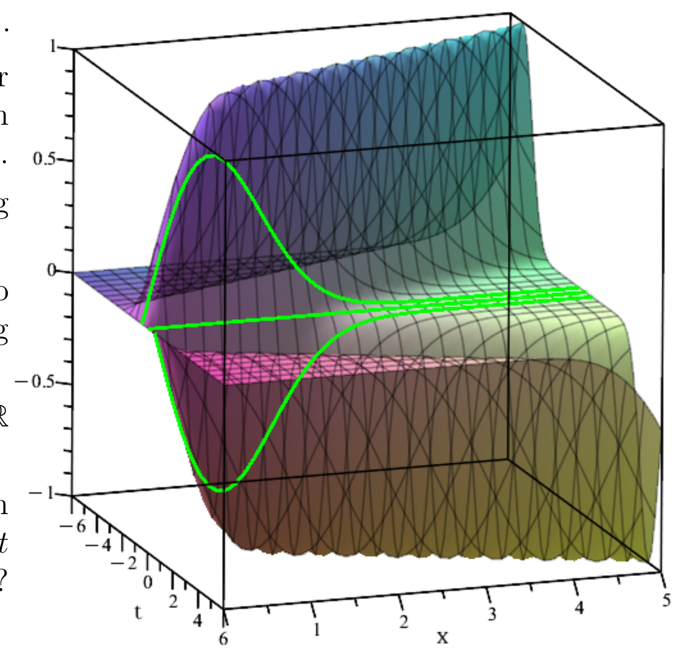
(a) Lösen Sie das Anfangwertproblem mit Hilfe der d'Alembertschen Formel. Der Graph der Lösung im Bereich $x \in [0,5]$ und $t \in [-6,6]$ ist rechts ersichtlich.

(b) Überprüfen Sie: Die Lösung erfüllt die Bedingung $u(0,t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir nur das Verhalten für $x \in [0,+\infty)$, so kann dies interpretiert werden als eine Befestigung des Wellenträgers bei $x = 0$.

(c) Überprüfen Sie, dass $u(x,t) = -u(x,-t)$ ist für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in [0,+\infty)$.

(d) Beschreiben Sie das Verhalten der Welle im Bereich $t \in [-6,6]$. Was passiert an der Stelle $x_0 := 0$, wenn t die Stelle 0 durchläuft (im Bild hell hervorgehoben)?



Platzaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung $u_{tt} = 9u_{xx}$ mit den Rand- und Anfangsbedingungen einer zweiseitig fixierten schwingenden Saite:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 = u(\pi,t) && \text{für } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \sin(2x) && \text{für } x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) &= 0 && \text{für } x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ unter Verwendung von 8.3.7.

(b) Bestimmen Sie das minimale $T > 0$ mit $u(x,t) = u(x,t+T)$ für $x \in [0,\pi]$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 14

Hausaufgaben

Abgabe bis Di 11.2.25 **nur** im Ilias.

Hausaufgabe 40 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; \sin(x)\;, \qquad u_t(x,0) \;=\; \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\int \frac{\mathrm{e}^s}{(1+\mathrm{e}^s)^2}\,\mathrm{d}s$$

unter Verwendung der Substitution $v := 1 + \mathrm{e}^s$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} u(0,t)$.

Hausaufgabe 41 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 5u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0\;, \qquad u_t(x,0) \;=\; \sin(3\pi x) \qquad \text{für } x \in [0,1]$$

und den Randbedingungen $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wellengleichung $u_{tt} \;=\; 5u_{xx}$, die Anfangsbedingungen und die Randbedingungen.

(c) Bestimmen Sie das minimale $t_0 > 0$ mit $u(x,t_0) = 0$ für $x \in [0,1]$.

Hausaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0\;, \qquad u_t(x,0) \;=\; \frac{8x}{1+x^2} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.

(b) Überprüfen Sie: Es ist $u(0,t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Überprüfen Sie: Es ist $u(x,t) = -u(x,-t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in [0,+\infty)$.

(d) Bestimmen Sie eine lokale Maximalstelle der Funktion $u(x,1)$ auf $[0,+\infty)$.