Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 1

Platzaufgaben

Platzaufgabe 1
Wir betrachten die Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft.

(a) Geben Sie eine normierte Parametrisierung der Geraden an.

(b) Rechnen Sie nach: Die Krümmung der Geraden ist an jeder Stelle gleich 0.

Platzaufgabe 2 Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} \ln(1+s^2) \\ -s+2\arctan(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in [-3, 3]$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve.
Verwenden Sie hierzu: $C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(1) \approx \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(2) \approx \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(3) \approx \begin{pmatrix} 2{,}3 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Wieso ist die Kurve symmetrisch zur x_1-Achse?

(b) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.
Machen Sie die Probe: Es ist $\langle\, v(s) \,|\, n(s) \,\rangle = 0$.

(d) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$.

(e) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(0)$ des Krümmungskreises an $C(0)$.
Skizzieren Sie den Krümmungskreis.

Künzer Wintersemester 2024/25

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 1

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 18.11.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 18.11.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 1

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+s^2) \\ \arctan(s) \\ s-\arctan(s) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises.

Hausaufgabe 2

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-s/2} \\ 2\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-s}}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Skizzieren Sie die Kurve in der x_1-x_2-Ebene für $s \in [0, 2]$.
Verwenden Sie hierzu $C(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(0{,}5) \approx \begin{pmatrix} 1{,}56 \\ -0{,}22 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(1) \approx \begin{pmatrix} 1{,}21 \\ -0{,}58 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(1{,}5) \approx \begin{pmatrix} 0{,}94 \\ -1{,}00 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(2) \approx \begin{pmatrix} 0{,}73 \\ -1{,}45 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Radius $\rho(s)$ des Krümmungskreises.