Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 3

Sei $C(s) = \begin{pmatrix} 2 \cos(s/2) \\ 2 \sin(s/2) \\ 0 \end{pmatrix}$ für $s \in [0, 2\pi]$ eine normierte Parametrisierung des Kreises $K = C([0, 2\pi])$ in der x_1 - x_2 -Ebene mit Radius 2 um den Ursprung.

- (a) Bestimmen Sie $v(s)$, $n(s)$ und $b(s)$.
- (b) Rechnen Sie nach: Die Torsion $\tau(s)$ ist an jeder Stelle gleich 0.

Platzaufgabe 4

Wir betrachten die Kurve in der x_1 - x_2 -Ebene, die durch

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

- (a) Skizzieren Sie die Kurve.
- (b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(t)$, den Normalenvektor $n(t)$, den Krümmungsradius $\rho(t)$ und den Mittelpunkt des Krümmungskreises $M(t)$.
- (c) Fügen Sie den Krümmungskreis an der Stelle $t = 1$ der Skizze aus (a) hinzu.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 2

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 25.11.24 in den Gruppenübungen oder bis Mo 25.11.24, 12:30 im Ilias.

Hausaufgabe 3

Wir betrachten wieder die Kurve, die durch

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1+s^2) \\ \arctan(s) \\ s - \arctan(s) \end{pmatrix}$$

normiert parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$. Vgl. Hausaufgabe 1.

- Bestimmen Sie den Binormalenvektor $b(s)$.
- Bestimmen Sie die Torsion $\tau(s)$.
- Bestimmen Sie $v'(s)$, $n'(s)$ und $b'(s)$.
- Verifizieren Sie die Frenet-Gleichungen im vorliegenden Fall.

Hausaufgabe 4

Wir betrachten die Kurve in der x_1 - x_2 -Ebene, die durch

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \cosh(t) + \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $t \in \mathbb{R}$.

- Rechnen Sie nach: Jeder Kurvenpunkt liegt auf

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1, x_1 \geq 1, x_3 = 0 \right\}.$$

Skizzieren Sie die Kurve.

- Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(t)$, den Normalenvektor $n(t)$ und den Krümmungsradius $\rho(t)$ und den Mittelpunkt des Krümmungskreises $M(t)$.
- Fügen Sie den Krümmungskreis an der Stelle $t = 0$ der Skizze aus (a) hinzu.